Elementos de Pre-cálculo

«Material Didáctico en Validación»

$$\sum \sqrt[n]{P}$$

Dr. Clemente Moreno

une
universidad nueva esparta

ÍNDICE

PREFACIO

La matemática es una ciencia viva que evoluciona buscando solución a los problemas que le son propios o aquellos que le plantea el entorno. Ella está presente en la mayor parte de los eventos que nos circundan, de modo que cuando se conocen algunos de sus conceptos, principios y teorías se le encuentra en todas partes, prestando apoyo para solventar los retos y tareas que plantea el entorno. Desde esta óptica, es insustituible en los planes y programas de formación del profesional universitario, especialmente de quienes eligen carrearas técnicas en áreas de ingeniería y administración.

Sin embargo, el buen desempeño de los alumnos en la matemática que soporta buena parte de la formación técnica universitaria, suele estar afectado, entre otras variables, por las escasas competencias de los participantes en el manejo de los métodos y conceptos básicos de la matemática preuniversitaria. Este hecho, que al juzgar por la literatura especializada, parece un problema común en muchas partes del mundo, alcanza dimensiones desmesuradas en el contexto venezolano, incidiendo decisivamente en las tasas de deserción y repitencia de los estudiantes en los primeros semestres de los estudios universitarios. A esta problemática común al ámbito universitario, suele enfrentarse de manera situada desde la acción didáctica del aula en sentido amplio. En atención a ello, el presente curso ofrece algunas técnicas y elementos de pre-cálculo, tratados desde una perspectiva que propicia la evocación, manejo y consolidación de un conjunto de ideas básicas de matemáticas elementales, que serán centrales en la conformación de conocimientos previos para el aprendizaje significativo de los conceptos del cálculo, el álgebra y la geometría, presentes en los programas de matemática que enseña la universidad a fin de fomentar el desarrollo de las competencias del perfil de sus egresados.

El curso se estructuró en tres capítulos: el primero versa sobre los diversos conjuntos numéricos que componen al conjunto de los números reales $\mathbb{R}$; el segundo, trata el aspecto de las operaciones con expresiones algebraicas a fin de dar soporte al problema de la factorización y simplificación; el tercero, centra su atención en la búsqueda del conjunto solución a las ecuaciones e inecuaciones en $\mathbb{R}$.

El primer capítulo, asociado a los conjuntos numéricos, contiene la construcción del conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ por deficiencia de sus subconjuntos. El desarrollo de este apartado está encaminado a revisar el manejo operativo que se deriva del estudio de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, y $\mathbb{Q}$, así como la aplicación de esta operatividad en la solución de problemas matemáticos y ámbitos afines al contexto académico de los estudiantes; sigue con la conformación de $\mathbb{R}$ a partir de la unión entre I y $\mathbb{Q}$, esto es «$\mathbb{R} = \mathrm{I} \cup \mathbb{Q}$» y la discusión de los axiomas que lo caracterizan como cuerpo ordenado y completo; luego contempla la biyección entre $\mathbb{R}$ y la recta numérica para dar pie a la exploración de los intervalos y las inecuaciones lineales; continúa con la revisión de la radicación en $\mathbb{R}$ y culmina con un nutrido grupo de ejercicios y problemas con sus respectivas respuestas, pensados y organizados para brindar al estudiante, la oportunidad de superar las fragilidades conceptuales y operativas que aún estén presentes.

El segundo capítulo, vinculado a las expresiones algebraicas, contempla la revisión de las operaciones entre estos objetos matemáticos como acción que generaliza la operatividad en $\mathbb{R}$, a fin de evocar y encarar el problema de la factorización y simplificación. Concluye con el apartado de ejercicios y sus respectivas respuestas, pensados y organizados para que el participante se reconcilie con el manejo conceptual y operativo de esta idea básica de la matemática previa al cálculo.

El tercer capítulo, ligado a la resolución de ecuaciones e inecuaciones en $\mathbb{R}$, sintetiza en este aspecto la aplicación central del curso y busca consolidar los esquemas conceptuales de los participantes para que enfrenten con éxito el aprendizaje de la matemática y sus implicaciones en el contexto universitario. El grupo de ejercicios y problemas con respuestas, dispuestos al final del apartado tienen este propósito.

No obstante, el propósito del curso puede plantarse en terreno infértil, si los ejercicios y problemas planteados en las actividades se realizan sin un juicioso análisis que permita la comprensión del objeto matemático que les dio sentido. Por ello, es preciso apertrecharse con las teorías y los procesos exhibidos en los ejemplos antes de iniciar la búsqueda de solución a la problemática planteada en las actividades de cierre de los capítulos.

Este curso también contiene un pre-test y un post-test. Su desempeño en el pre-test, a corroborar mediante el contraste de sus respuestas con las dadas en la clave de corrección dispuesta al final del material, será el indicativo del esfuerzo a realizar durante el desarrollo del curso. Del mismo modo, su desempeño al responder la actividad de post-test, colocado al final del material, le indicará el aprovechamiento del curso y el posible éxito en el futuro estudio de la matemática en el contexto universitario.

PRE-TEST

Tiempo. 1 hora con 30 minutos

INSTRUCCIONES

A continuación se encuentra un conjunto de interrogantes, cada una con cuatro respuestas probables pero sólo una es correcta, selecciónela encerrando en un círculo la letra que se corresponda con ésta. Si es necesario, efectué cálculos antes de emitir respuesta.

1. El número $(0{,}125)^{-\frac{1}{3}}$ también se escribe cómo:
   a) 2
   b) $\frac{1}{2}$
   c) 4
   d) $\frac{1}{4}$
2. La expresión $0{,}2\left(\frac{3}{4}+2^{-1}\right)$ equivale a:
   a) $\frac{25}{4}$
   b) $\frac{1}{5}$
   c) $\frac{1}{4}$
   d) $\frac{5}{4}$
3. Si $a \neq 0$ entonces $\frac{1}{a}+\frac{1}{2a}+\frac{1}{3a}$ es igual a:
   a) $\frac{5}{6}a$
   b) $\frac{11}{6a}$
   c) $\frac{1}{6a^3}$
   d) $\frac{3}{6a}$

4. Si la suma de una fracción y su inversa es igual a $\frac{17}{4}$ y la diferencia de ambas es igual a $\frac{15}{4}$, entonces la fracciones son:

a) $\frac{4}{1}$ y $\frac{1}{4}$

b) $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{2}$

c) $\frac{3}{4}$ y $\frac{4}{3}$

d) $\frac{2}{5}$ y $\frac{5}{2}$

5. Si el 10% de X es igual al 25% de 16, entonces el valor de X es:

a) 4

b) 10

c) 40

d) 25

6. Si $a-b>a$ y $a+b<b$, entonces

a) $a<0$ y $b>0$

b) $a<0$ y $b<0$

c) $a<b$

d) $b<a$

7. El valor de $\left\{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]^{3}\right\}^{-1} \div \left(\frac{32}{243}\right)$ es:

a) $\frac{2}{3}$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{5}$

c) $\frac{3}{2}$

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-6}$

8. Si $x=2$ y $y=-\sqrt[4]{16}$ entonces el valor de $(x+y)^5$ es:

a) 1

b) -3

c) 0

d) 4^4

9. Si $2^{x-y} = 8$ y $9^{\frac{y}{2}} = 3$ entonces «x» es igual a:

a) 0

b) 4

c) 2

d) 3

10. Al simplificar la expresión $\left(1-\frac{1}{2}\right).\left(1-\frac{1}{3}\right).\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{99}\right)$ se obtiene:

a) $\frac{1}{99}$

b) $\frac{2}{99}$

c) $\frac{3}{99}$

d) $\frac{4}{99}$

11. La expresión $x^3 - x^2 - 4x + 4$ es igual a:

a) $(x+2)(x+2)(x+1)$

b) $(x+2)(x+2)(x-1)$

c) $(x+2)(x-2)(x+1)$

d) $(x-2)(x+2)(x-1)$

12. Los valores de «x» que satisface la identidad $\frac{4}{5x} = \frac{7}{x^2+6}$ son:

a) 8 y $\frac{3}{4}$

b) 8 y $\frac{4}{3}$

c) $\frac{3}{4}$ y $\frac{3}{4}$

d) 3 y $\frac{2}{3}$

13. Un número es el triple de otro y la diferencia de sus cuadrados es 128. ¿Cuáles son los números?

a) 4 y 7

b) 6 y -4

c) 4 y -4

d) 5 y 4

14. La expresión $-(3-2x)+(2x-3)^2-(4x^2-9)$ también se escribe como:

a) $-5(2x-3)$

b) $(2x-3)^2$

c) $-(4x^2-9)$

d) $(3-2x)$

15. Para $x \neq 3$ el cociente $\frac{9-x^2}{x^2-7x+12}$ es equivalente a:

a) $\frac{3+x}{4-x}$

b) $\frac{x-3}{x-4}$

c) $\frac{x-3}{x+3}$

d) $\frac{x+3}{x+4}$

16. Si $\mathrm{A}=\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ y $\mathrm{B}=\left\{x \in \mathbb{R} \,/\, -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{3}{2}\right\}$ entonces $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ es el intervalo

a) $\mathbb{R}$

b) $\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{2},+\infty\right)$

c) $\left[-\frac{2}{3},\frac{3}{2}\right]$

d) $\left[-\frac{2}{3},-\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$

17. ¿Para cuáles valores de «x» se cumple la desigualdad $\frac{2x}{x-1}>1$?

a) $\forall\, x \in \mathbb{R}$

b) $\forall x \in (1,+\infty)$

c) $\forall x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$

d) $\forall x \in (-1,1)$

18. El conjunto solución de la desigualdad $\left|\frac{x^2+x+1}{x+1}\right|<\frac{3}{2}$ es:

a) $\mathrm{S}=\mathbb{R}$

b) $\mathrm{S}=\left(-\frac{1}{2},1\right)$

c) $\mathrm{S}=\mathbb{R}\sim\left\{-\frac{1}{2},\ 1\right\}$

d) $\mathrm{S}=\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right) \cup (1,+\infty)$

19. La solución a la inecuación $\ln\left(\frac{x^2-3}{2x}\right) > 0$ es el intervalo

a) $S = (-\infty, -1) \cup (0, 3)$

b) $S = (-1, 0) \cup (3, +\infty)$

c) $S = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

d) $S = (-\infty, -1) \cup (0, 3)$

20. El valor de «x» que hace cierta la igualdad $\log(x^2 - 1) - \log(x + 1) = 2$ es:

a) 100

b) 1

c) 101

d) 99

CAPÍTULO 1: CONJUNTOS NUMÉRICOS

El Conjunto de los Números Naturales $\mathbb{N}$

Para una aproximación intuitiva al conjunto $\mathbb{N}$, se puede considerar que:

a. Este conjunto $\mathbb{N}$ tiene por elementos a los números que utilizamos para contar a los cuales se denominan «números naturales».
b. Que existe un objeto matemático llamado cero indicado con el símbolo «0», y
c. Que se da una relación en $\mathbb{N}$ mediante la frase «es siguiente de»

Bajo estas premisas los números naturales se consideran como el conjunto $\mathbb{N}$ que satisface las condiciones siguientes:

a. 0 pertenece a $\mathbb{N}$, en símbolos «$0 \in \mathbb{N}$»
b. Si n pertenece a $\mathbb{N}$, «$n \in \mathbb{N}$ » su siguiente « $n+1$» pertenece a $\mathbb{N}$, « $n+1 \in \mathbb{N}$»

De este modo, todos los números naturales pertenecen al conjunto $\mathbb{N}$, el cual mediante un «abuso de notación» se acostumbra a indicar por:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ..\}$$

Tal sucesión de números naturales suele representarse mediante puntos distantes, una unidad entre sí. Los cuales se disponen en forma lineal, como ilustra la figura.

.   .   .   .
1   2   3   4   5   6   7   8   9

En esta secuencia, dados dos naturales a y b, estos siempre pueden compararse, es decir, entre ellos se cumple una y sólo una de las relaciones siguientes:

$$a < b \quad \text{o bien} \quad a = b \quad \text{o bien} \quad a > b$$

Operaciones con Números Naturales

Adición. Si a y b son naturales, existe un único número $s \in \mathbb{N}$ llamado suma, tal que:

$$a + b = s$$

Los números naturales a y b corresponden a los **«términos»** de la suma «s».

Ejemplo. Los números $18 \in \mathbb{N}$ y $24 \in \mathbb{N}$ son los términos de la suma $18 + 24 = 42$, con $s = 42 \in \mathbb{N}$

Nota 1. La diferencia $a - b = d$ donde $a = b + d$, con a, b y d números naturales, es una operación no cerrada en $\mathbb{N}$, pues los números 24 y 18 son números naturales, lo mismo que su diferencia $24 - 18 = 6$ ya que $24 = 6 + 18$; pero $18 - 24$ carece de sentido en $\mathbb{N}$, pues no existe un número natural que sumado a 24 sea igual a 18.

Multiplicación. Para cada a y b en $\mathbb{N}$, existe un único número «p» en $\mathbb{N}$ llamado producto, tal que:

$$a.b = p$$

Los números naturales a y b corresponden a los **«factores»** del producto «p».

Ejemplo. Los números $15 \in \mathbb{N}$ y $17 \in \mathbb{N}$ son los factores del producto $15 . 17 = 255$, donde $\mathrm{p} = 255 \in \mathbb{N}$

Nota 2. La división $a \div b = c$ donde $a = b.c$ con a, b y c números naturales, no siempre es un número natural.

Ejemplo. Los números 24 y 12 son de $\mathbb{N}$ lo mismo que su división $24 \div 12 = 2$ ya que $24 = 2.12$, mientras que $12 \div 24$ carece de sentido en $\mathbb{N}$, pues no existe un número natural que multiplicado por 24 sea igual a 12.

La deficiencia señalada en la primera nota, conduce a la ampliación del conjunto de los números naturales hasta un nuevo conjunto, donde la diferencia entre los números «a» y «b» siempre sea posible. Para ello, a cada número natural «a» se le agrega su opuesto «$-a$» ampliando la operación suma mediante «la propiedad del número opuesto» es decir: $(-a) + a = a + (-a) = 0$ para todo número «a».

Ejemplo. La diferencia $18 - 24$ ahora es posible, debido a que $18 - 24 = -6$, al sumar 6 se tiene como resultado 0, esto es $6 + (18 - 24) = (6 + 18) - 24 = 24 - 24$. Esta ampliación deriva el conjunto $\mathbb{Z}$.

El Conjunto de los Números Enteros $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \{\mathbb{Z}: z = a - b, con\ a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}\}$$

Cuando $a > b$ se define $\mathbb{Z}^{+} = \{\mathbb{Z}: z = a - b, con\ a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}\ y\ a > b\}$

Cuando $a < b$ se define $\mathbb{Z}^{-} = \{\mathbb{Z}: z = a - b, con\ a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}\ y\ a < b\}$

Cuando $a = b$ se define $\mathbb{Z}^{\mathbf{0}} = \{\mathbb{Z}: z = a - b, con\ a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}\ y\ a = b\}$

Luego, $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{-} \cup \mathbb{Z}^{0} \cup \mathbb{Z}^{+} = \{\ldots - 6, -5, -4, -3, -2, -1, \ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots.\}$

Al igual que $\mathbb{N}$, el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$, se representa mediante puntos distantes, una unidad entre sí, dispuestos en forma lineal, como en la figura.

. . . .
-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7

COMENTARIO

En $\mathbb{Z}$ se define el valor absoluto del entero «a» denotado $|a|$, al número que se calcula con la regla

$$|a| = \begin{cases} a & si\ \ a \geq 0 \\ -a & si\ a < 0 \end{cases}$$

Ejemplo. $|5| = 5$; $|-5| = 5$ y $|0| = 0$

Desde el punto de vista geométrico, el valor absoluto del número entero «a» se interpreta como la distancia existente entre el origen 0 y el número «a».

Ejemplo. $|5| = 5$, indica que la distancia entre el entero 0 y el entero 5 es 5, del mismo modo $|-5| = 5$, señala que la distancia entre el entero 0 y el entero -5 es 5.

Operaciones con Números Enteros

Adición. Al igual que en $\mathbb{N}$, si a y b son números enteros, entonces existe un único entero «s» llamado suma, tal que:

$$a + b = s$$

En esta operación «s» puede ser positivo, negativo o nulo. En la determinación del signo de «s» se presentan los siguientes casos:

a. Si $a > 0$ y $b > 0$ entonces $s \in \mathbb{Z}^+$, pero si $a < 0$ y $b < 0$ se tiene $s \in \mathbb{Z}^-$.

   Ejemplo. $3 \in \mathbb{Z}^+$ y $8 \in \mathbb{Z}^+$ son los términos de la suma $3 + 8 = 11$, con $s = 11 \in \mathbb{Z}^+$, de igual modo $-3 \in \mathbb{Z}^-$ y $-8 \in \mathbb{Z}^-$ son términos de la suma $(-3) + (-8) = -11$, donde $s = -11 \in \mathbb{Z}^-$

b. Si $a < 0$ y $b > 0$ o bien $a > 0$ y $b < 0$, es decir a y b tienen signos diferentes, entonces el signo de «s» será el signo del término mayor en valor absoluto.

   Ejemplo. $3 \in \mathbb{Z}^+$ y $-8 \in \mathbb{Z}^-$ tienen distinto signo, luego su suma $3 + (-8) = -5$ ya que $|-8| > |3|$; mientras que $8 + (-3) = 5$ ya que $|8| > |-3|$

Lo expresado en los incisos (a) y (b) se resume indicando que: «la suma de dos enteros con igual signo, es otro entero con el mismo signo de los sumandos; mientras que la suma de dos enteros con diferente signo, es la diferencia entre los términos de la suma donde prevalece el signo del término mayor en valor absoluto».

COMENTARIO

La diferencia d, entre los enteros a y b definida por la expresión $a - b = d$, es una operación cerrada en $\mathbb{Z}$, ya que $a = b + d$ es un entero.

Ejemplo. La diferencia $17 - 12 = 5$ debido a que $17 = 5 + 12$ y $5 \in \mathbb{Z}$; pero también la diferencia $12 - 17 = -5$ permanece en $\mathbb{Z}$ ya que $12 = -5 + 17$ y $-5 \in \mathbb{Z}$.

Multiplicación. Al igual que en $\mathbb{N}$, si a y b son números enteros, su producto «p» es un número entero único, de la forma $a.b = \mathrm{p}$, el cual será:

a. **Positivo**, si los factores a y b son del mismo signo, es decir $a > 0$ y $b > 0$ o bien $a < 0$ y $b < 0$. En particular, $4 \in \mathbb{Z}^+$ y $8 \in \mathbb{Z}^+$ conforman los factores «con igual signo» del producto $4.8 = 32$, donde

$p = 32$; de igual modo $-4 \in \mathbb{Z}^-$ y $-8 \in \mathbb{Z}^-$ son los factores «con igual signo» del producto $(-4).(-8) = 32$, donde $p = 32$.

b. **Negativo**, si los factores a y b son de signo diferente, es decir $a < 0$ y $b > 0$ o bien $a > 0$ y $b < 0$. Así, $-4 \in \mathbb{Z}^-$ y $8 \in \mathbb{Z}^+$ conforman los factores «con distinto signo» del producto $(-4).8 = -32$, con $p = -32$, asimismo $4 \in \mathbb{Z}^+$ y $-8 \in \mathbb{Z}^-$ son los factores «con distinto signo» del producto $4.(-8) = -32$, con $p = -32$.

Lo expresado en los incisos (a) y (b) se resume indicando que: «el producto de dos enteros con igual signo, es otro entero con signo positivo; mientras que el producto de dos enteros con distinto signo, es otro entero con signo negativo».

COMENTARIO

Al producto del entero «a» «n-veces» por sí mismo, es decir $a.a.a \ldots a = a^n$ se llama potenciación en $\mathbb{Z}$. Cuando $a \in \mathbb{Z}^-$ y «n» es par $a^n > 0$, peros si «n» es impar $a^n < 0$. En $\mathbb{Z}$ se tiene que para $a \neq 0$, $a^1 = a$ mientras que 0^0 no está definido.

Ejemplo. La potencia $(-3)^4 = (-3).(-3).(-3).(-3) = 81$ en tanto que $(-3)^3 = (-3).(-3)(-3) = -27$. Cuando $a \in \mathbb{Z}^+$, $a^n > 0$ sin importar que «n» sea par o impar

En $\mathbb{Z}$ la potenciación verifica las propiedades siguientes:

a. Si $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ y $m \in \mathbb{Z}^+$ entonces $a^n.a^m = a^{n+m}$.

Ejemplo. Para $5 \in \mathbb{Z}$, $2 \in \mathbb{Z}^+$ y $3 \in \mathbb{Z}^+$ se tiene que $5^2.5^3 = 5^{2+3} = 5^5 = 3125$

b. Si $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ y $m \in \mathbb{Z}^+$ con $n > m$ entonces $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

Ejemplo. Para $3 \in \mathbb{Z}$, $7 \in \mathbb{Z}^+$ y $4 \in \mathbb{Z}^+$ siendo $7 > 4$, se tiene $\frac{3^7}{3^4} = 3^{7-4} = 3^3 = 27$

c. Si $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, $m \in \mathbb{Z}^+$ o $n \in \mathbb{Z}^-$ y $m \in \mathbb{Z}^-$ entonces $(a^n)^m = a^{n.m}$.

Ejemplo. Para $2 \in \mathbb{Z}$, $3 \in \mathbb{Z}^+$ y $4 \in \mathbb{Z}^+$ se tiene $(2^3)^4 = 2^{3.4} = 2^{12} = 4096$

d. Si $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{Z}^+$ entonces $(a.b)^n = a^n.b^n$.

Ejemplo. Si $(-3) \in \mathbb{Z}$, $5 \in \mathbb{Z}$ y $3 \in \mathbb{Z}^+$es $[(-3).5]^3 = (-3)^3(5)^3 = (-27)(125) = -3375$.

COMENTARIO

Al igual que en $\mathbb{N}$, si a y b son números enteros, entonces $a \div b = c$ donde $a = b.c$, no siempre es un entero. Pero si $a = b.c$ se dice que «b» divide a «a» o bien « a es divisible por b » y se escribe $b|a$. **Ejemplo**. 4 divide a 20 « $4|20$ » debido a que $20 = 4.5$; si b no divida a a se escribe $a = b.c + r$ donde $0 \leq r < |b|$ «cuando $r = 0$, b divide a a ».

Lo esgrimido habla de prioridad operativa en la ejecución de operaciones. Así, al operar se tiene:

$$
\begin{aligned}
3 + 2\{5 - [2(3.2^2 - 7) + 2^3(3.2^2 - 9)] + 6\} &= 3 + 2\{5 - [2(3.4 - 7) + 8\,(3.4 - 9)] + 6\} \\
&= 3 + 2\{5 - [2(12 - 7) + 8(12 - 9)] + 6\} \\
&= 3 + 2\{5 - [2(5) + 8(3)] + 6\} \\
&= 3 + 2\{5 - [10 + 24] + 6\} \\
&= 3 + 2\{5 - 34 + 6\} \\
&= 3 + 2\{-23\} \\
&= 3 - 46 \\
&= -43
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2. Al operar la expresión $\frac{5^3.3^2}{15^2} + 3\left\{\frac{3[4(3^2 - 22)]}{6} - \frac{3^2[2^3(2^3 - 5)]}{12}\right\} + 4^3$ se tiene:

$$
\begin{aligned}
\frac{5^3.3^2}{15^2} + 3\left\{\frac{3[4(3^2 - 22)]}{6} - \frac{3^2[2^3(2^3 - 5)]}{12}\right\} + 4^3 &= \frac{5^3 3^2}{5^2 3^2} + 3\left\{\frac{3.2^2(9 - 22)}{3.2} - \frac{3^2 2^3(8 - 5)}{3.2^2}\right\} + (2^2)^3 \\
&= 5^{3-2}.3^{2-2} + 3\{3^{1-1}2^{2-1}(9 - 22) - 3^{2-1}2^{3-2}(3)\} + 2^6 \\
&= 5.3^0 + 3\{3^0.2(-13) - 3.2(3)\} + 64 \\
&= 5.1 + 3\{1.2(-13) - 6(3)\} + 64 \\
&= 5 + 3\{2(-13) - 18\} + 64 \\
&= 5 + 3\{-26 - 18\} + 64 \\
&= 5 + 3(-44) + 64 \\
&= 69 + (-132) \\
&= -63
\end{aligned}
$$

COMENTARIO

Un número entero «p» es primo, si $p > 1$ y sus únicos divisores son p y 1. De acuerdo con esto, para averiguar si un número entero es primo se divide sucesivamente por los números primos 2, 3, $5, \ldots\, p$ hasta obtener un cociente natural menor o igual que el primo que se ensaya. Si el cociente no es exacto, el número es primo.

Ejemplo. El número 23 es primo, debido a que $23 > 1$; y en las divisiones sucesivas, se tiene:

$\begin{array}{r|l} 23 & \underline{\;2\;\;\;\;} \\ 1 & 11 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r|l} 23 & \underline{\;3\;\;\;\;} \\ 2 & 7 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r|l} 23 & \underline{\;5\;\;\;\;} \\ 3 & 4 \end{array}$ $\quad 4 < 5$ y 5 no es un divisor de 23, luego 23 es un entero primo.

Los números enteros que no son primos, son números compuestos. Estos se caracterizan por escribirse como el producto de sus factores primos. En particular, 12 es un número compuesto, debido a que $12 = 2.2.3 = 2^2.3$

Criterios de Divisibilidad

a. Un número se divide entre 2, si su última cifra es un número par o cero.

Ejemplo. El número 12 es divisible por 2 ya que $12 = 2.6$

b. Un número se divide entre 3, si la suma de sus cifras es un número múltiplo de 3.

Ejemplo. El número 13.512 es divisible por 3, debido a que $1 + 3 + 5 + 1 + 2 = 12$ y $12 = 3.4$

c. Un número se divide entre 5, si su última cifra es cero o cinco.

Ejemplo. El número 525 es divisible por 5, ya que $525 = 5.(105)$

d. Un número se divide entre 7, si separada la primera cifra de la derecha, multiplicada y restado este producto de lo que queda a la izquierda hasta la última cifra resulta cero o múltiplo de 7.

Ejemplo. Los números 2.058 y 2.401 son divisibles por 7, debido a que:

$$\begin{array}{l} \;\;205'8 \text{ x } 2 = 16 \\ \;\underline{\;16\;} \\ 18'9 \text{ x } 2 = 18 \\ \underline{\;18\;} \\ \;\;0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} \;\;240'1\; x\; 2 = 2 \\ \;\underline{\;\;2\;} \\ 23'8 \text{ x } 2 = 16 \\ \underline{\;16\;} \\ \;\;7 \end{array}$$

Para investigar si un número se divide entre 13, 17 o 19 se sigue un proceso análogo, excepto que para el criterio de divisibilidad entre 13, 17 o 19 al separar la cifra de la derecha se multiplica por 9, 5 o 17 respectivamente. En particular, se tiene:

$145'6 \text{ x } 9 = 54$
$\underline{54}$
$9'1 \text{ x } 9 = 9$
$\underline{9}$
0
$\therefore$ 13 divide a 1456

$273'7 \text{ x } 5 = 35$
$\underline{35}$
$23'8 \text{ x } 5 = 40$
$\underline{40}$
17
$\therefore$ 17 divide a 2737

$119'7 \text{ x } 17 = 119$
$\underline{119}$
0
$\therefore$ 19 divide a 1197

e. Un número se divide entre 11, si la suma de sus cifras que ocupan los lugares pares menos la suma de las cifras que ocupan los lugares impares es igual a cero.

Ejemplo. El número 4763 es divisible por 11, ya que $(3 + 7) - (6 + 4) = 0$.

Estos criterios de divisibilidad son útiles al momento de descomponer un número compuesto en sus factores primos. En particular, al descomponer el número 924 se tiene:

924	2
462	2
231	3
77	7
11	11
1	

Luego $924 = 2^2.3.7.11$

El número de divisores de un entero positivo se determina por el producto de cada uno de los exponentes de los factores aumentado en 1. Particularmente, el número de divisores de $924 = 2^2.3.7.11$ es $(2 + 1).(1 + 1).(1 + 1).(1 + 1) = 24$

Para obtener los divisores, al lado de 1 se escribe el primo más pequeño y sus potencias en la primera fila de una matriz y en la primera columna después de 1 se colocan en orden creciente los otros factores primos junto a sus potencias y sus productos hasta que se agoten los factores. Para el entero 924 se tiene:

1	2	4
3	6	12
7	14	28
11	22	44
21	42	84
33	66	132
77	154	308
231	462	924

Mínimo Común Múltiplo. Al entero positivo que es múltiplo de una serie de enteros positivos se le denomina común múltiplo. Si existen varios múltiplos, al más pequeño de ellos se llama «mínimo común múltiplo». Ejemplo, cada número entero del conjunto $\{15, 30, 45, 60, 75, ..15k, ...\}$ es múltiplo de 3 y 5. Como el entero 15 es el menor de todos los números del conjunto, entonces el $\mathrm{m.c.m}(3, 5) = 15$.

Máximo Común Divisor. Un número entero que es divisor de cada uno de los números enteros dados se llama divisor común de esos números. En caso de que existan varios divisores comunes al más grande de ellos se le denomina máximo común divisor. Ejemplo, en el conjunto $\{12,\ 15, 18\}$ los divisores de 12, 15 y 18 son:

1	2	4
3	6	12

1	3
5	15

1	2
3	6
9	18

Luego el $\mathrm{M.C.D}(12{,}15{,}18) = 3$

Algoritmo de Euclides. Para determinar el $\mathrm{M.C.D.}$ entre dos números naturales a y b, mediante el algoritmo de Euclides, se divide el número mayor entre el número menor. Si esta división es exacta, entonces el menor número natural es el máximo común divisor. En particular, en la determinación del $\mathrm{M.C.D.}(41.580;\ 630)$ se tiene:

$$\begin{array}{r|l} 4158'0 & 630 \\ \cline{2-2} 3780 & 66 \\ 000 & \end{array}$$

Luego el $\mathrm{M.C.D.}(41.580;\ 630) = 630$

Si la división no es exacta, lo que en esta era divisor se divide entre el primer resto, el cual será el dividendo para el segundo resto, y así hasta que el resto sea cero. «Este último divisor es el máximo común divisor». Particularmente, en el $\mathrm{M.C.D.}(1.176.604;\ 496.584)$ se procede como se indica:

1176604 | 496584 183436 2	496584 | 183436 129712 2	183436 | 129712 53724 1	129712 | 53724 22264 2	53724 | 22264 9196 2
22264 | 9196 3872 2	9196 | 3872 1452 2	3872 | 1452 968 2	1452 | 968 482 1	968 | 482 000 2

Luego el $\mathrm{M.C.D.}(1.176.604;\ 496.584) = 482$

En la práctica, para determinar el «$\mathrm{m.c.m}$ y el $\mathrm{M.C.D.}$» entre varios números, se procede a descomponer los números en sus factores primos. Para hallar el $\mathrm{m.c.m}$ de estos, se toma el producto de sus factores comunes o no con su mayor exponente y para el $\mathrm{M.C.D.}$, el producto de estos factores comunes con su menor exponente. En particular, para hallar el $\mathrm{m.c.m}$ y el $\mathrm{M.C.D.}$ entre 420, 180 y 252, se tiene:

420	2	180	2	252	2
210	2	90	2	126	2
105	3	45	3	63	3
35	5	15	3	21	3
7	7	5	5	7	7
1		1		1	

Siendo $\begin{array}{l} 420 = 2^2.3.5.7 \\ 180 = 2^2.3.7 \\ 252 = 2^2.3^2.7 \end{array}$ entonces $\begin{array}{c} \mathrm{m.c.m}(420,180.252) = 2^2.3^2.5.7 = 1260 \\ y \\ \mathrm{M.C.D}(420,180,252) = 2^2.3 = 12 \end{array}$

Actividad Nº 1

Resuelva los ejercicios siguientes teniendo en cuenta la prioridad de operaciones

1. $2 + 3.8 - 6 + 5.2 - 3.4$
2. $6 + 4.(7 - 5) - 3 + 2.3$
3. $(3^2 + 2) + (3 + 2)^2 + (3^2 + 2^2) + (3 + 2^2)$
4. $2.(3.5) + 2.3.7 + (3.2).4 - 3.(2.3 + 4)$
5. $2^3.5 - 12 \div 3 + 2^2(2^5 - 30) - 2^2(2^2 + 1)$
6. $7(5 - 5) + (9 - 6 - 3) - 8(10 - 8 - 2)$
7. $\left(\frac{2^5 3^2}{3.2^4}\right) - [10(3 + 7) + 5] \div \left(\frac{3^4 7^6}{7^5 3^3}\right) + 5.2^2$
8. $7 + \{50 - [2(5 - 1) - 3(1 + 2) + 2^2 3] - 20\}$

9. $5(3.4 - 1) + 7[3 + 5.3(2 - 3) + 1] - 5[-4(3 + 6) - 18 \div (3 - 3.2^2)]$

10. $3 + \left\{5 - 4[18 + 2(6 \div 3 - 4)^3] + 12 \div [7 - 5\left(4 + (-3)\right)]^2 - 8(-7 + 5)^3\right\}$

11. $\dfrac{\frac{12}{3} \div \left(-\frac{8}{4}\right)}{\frac{10}{5} - 1} + \dfrac{\frac{2^3.3^2.5^3}{10^3} \div \frac{3.2^2}{6 + \left(2.3 - 2^3\right)}}{\frac{8}{2} - 3\left(5 + (-4)\right)}$

12. Si $x + y + z = 50$ entonces a) $x + (y + 15) + (z + 5)$ y b) $(x + 2) + (y + 3) + (z + 5)$ equivalen a:

13. ¿Qué número entero representa la expresión $\left[p - \left(q - \frac{p}{q}\right)\right]^{\frac{p}{q}}$ cuando $p = 8$ y $q = 4$?

14. Si $p = 5$, $q = -7$ y $v = 12$ ¿Qué número representa el cociente $\frac{p\,(v\ +\ q\ -\ p)}{v\,(p\ +\ q)}$?

15. ¿Cuál es el valor de «x» que hace ciertas las siguientes identidades? e indique además si $x \in \mathbb{N}$ o $x \in \mathbb{Z}$
    a. $x + 16 = 87$
    b. $259 - x = 60$
    c. $596 + x = 985$
    d. $136 - (7 + x) = 50$
    e. $x + 8 = 5$
    f. $124 - (x - 7) = 12$
    g. $3x + 7 - 2^2(3 - 2) = 0$
    h. $6x + 5[3 - 2(x + 1)] = 3 - 6x$

16. ¿Cuáles de los siguientes números son primos?
    a) 97; b) 853; c) 307; d) 811; e) 997; f) 197; g) 191; h) 601; i) 821; j) 1202;

17. ¿Cuáles son los divisores de los números siguientes?
    a) 54; b) 130; c) 240; d) 210; e) 162; f) 204; g) 1800; h) 735;

18. Escriba los enteros siguientes como producto de sus factores primos
    a) 49896; b) $(1995)^3$; c) 26460; d) $[(12)^4.18.(21)^3]^5$;

19. Halle el máximo común divisor (M.C.D.) y mínimo común múltiplo (m.c.m.) en:
    a) (48, 36, 96); b) (80, 27, 40); c) (32, 48, 10); d) (75, 375, 45); e) (8, 10, 15, 32);

La Estrategia de Tanteo en la Solución de Problemas.

En $\mathbb{Z}$ se puede encontrar solución a una gran variedad de problemas relacionados con el entorno académico y profesional del estudiante. Con el propósito de brindar herramientas para darle solución a éstos, se propone la estrategia de tanteo a fin de contribuir con la traducción algebraica dada en el problema que se pretende resolver.

Ejemplos referidos al proceso de traducción al lenguaje algebraico:

Ejemplo 1.

Procedimiento	Descripción algebraica
Dado un número, hacer: 1) Multiplicar el número dado por 4 1) Dividir el número dado entre 2 2) Restar lo obtenido en (2) de lo obtenido en (1)	Sea «x» el número dado 3) $4x$ 2) $\frac{x}{2}$ 3) Modelo algebraico «$4x-\frac{x}{2}$» asociado

Ejemplo 2.

Procedimiento	Descripción algebraica
Dado un número diferente de cero, hacer: 1) Elevar al cubo el número dado 2) Dividir este resultado entre 4 3) Inverso del número dado 4) Multiplicar por 8 el resultado de 3 5) Sumar lo obtenido en (4) al resultado de (2)	Sea «x» el número y $x \neq 0$ 1) x^3 2) $\frac{x^3}{4}$ 3) $\frac{1}{x}$ 4) $8.\left(\frac{1}{x}\right)$ 5) Modelo algebraico «$8.\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{x^3}{4}$» asociado

Ejemplo 3.

Procedimiento	Descripción algebraica
Dado un número diferente de 3, hacer 1) Multiplicar por 3 el número dado 2) A este resultado restarle 9 3) Inverso de lo obtenido en 2 4) Multiplicar por 2 el número dado 5) Al número dado restarle 3 6) Dividir el resultado de (4) entre el resultado de (5) 7) Restar lo obtenido en (6) de lo obtenido en (3)	Sea «x» el número y $x \neq 3$ 1) $3x$ 2) $3x-9$ 3) $\frac{1}{3x-9}$ 4) $2x$ 5) $x-3$ 6) $\frac{2x}{x-3}$ 7) Modelo Algebraico «$\frac{1}{3x-9}-\frac{2x}{x-3}$» asociado

Problemas resueltos con estrategia de tanteo:

Ejemplo 1. A la pregunta, ¿cuántos libros tiene el estante?, el individuo responde: «si tuviera el doble de lo que tengo, más la mitad de lo que tengo, y además siete, tendría treinta y dos libros» ¿Cuántos libros cree que tiene el estante?

Tanteo	Procedimiento	Descripción algebraica
Dado un N^0, digamos 6 hacer:	Dado un número, hacer	Sea «x» el número dado
1) $2.(6)$	1) Multiplicar por 2 el número dado	1) $2x$
2) $\frac{6}{2}$	2) Dividir entre 2 el número dado	2) $\frac{x}{2}$
3) $2(6)+\frac{6}{2}+7$	3) Sumar el resultado de (1) y (2) mas 7	3) $2x+\frac{x}{2}+7$
4) $2(6)+\frac{6}{2}+7=32$?	4) Igualar a 32 resultado de (3)	4) $2x+\frac{x}{2}+7=32$

Siendo $2x+\frac{x}{2}+7=32$, entonces $4x+x+14=64$ o bien $5x=50$, luego $x=10$ es el número de libros que hay en el estante.

Ejemplo 2. Una persona tiene 2270 bolívares en 58 billetes de 50 y 20 bolívares. ¿Cuántos billetes de Bs. 20 tiene?

Tanteo	Procedimiento	Descripción algebraica
Dado el N^0, digamos 30 hacer:	Dado un número, hacer	Sea «x» el número dado
1) $58-30=28$ (billetes de 50)	1) Restar número dado de 58	1) $58-x$
2) $20.(30)$	2) Multiplicar por 20 número dado	2) $20x$
3) $50.(28)$	3) Multiplicar 50 el resultado de (1)	3) $50(58-x)$
4) $20.(30)+50(28)$	4) Sumar resultado de (2) y (3)	4) $20x+50(58-x)$
5) $20(30)+50(28)=2270$?	5) Igualar a 2270 resultado (4)	5) $20x+50(58-x)=2270$

Siendo $20x+50(58-x)=2270$, entonces $20x+2900-50x=2270$ o bien $-30\text{x}=-630$, luego $x=21$ es el número de billetes de Bs. 20.

Ejemplo 3. Un padre tiene 38 años y su hijo 11. ¿Dentro de cuántos años será la edad del padre el doble de la edad del hijo?

Tanteo	Procedimiento	Descripción algebraica
Dado el N^0, digamos 12 hacer:	Dado un número, hacer	Sea «x» el número dado
1) $38+12$	1) Aumentar en 38 el número dado	1) $x+38$
2) $11+12$	2) Aumentar en 11 el número dado	2) $x+11$
3) $2(11+12)$	3) Multiplicar por 2 resultado de (2)	3) $2(x+11)$
4) $38+12=2(11+12)$	4) Igualar resultados de (1) y (3)	4) $x+38=2(x+11)$

Siendo $x + 38 = 2(x + 11)$, entonces $38 - 22 = 2x - x$ luego $x = 16$ es el número de años que han de transcurrir para que la edad del padre doble a la edad del hijo.

Ejemplo 4. En una granja hay 110 animales entre pollos y chivos. El total de patas de los animales suman 306. Si los animales son sanos. ¿Cuántos chivos hay en la granja?

Tanteo	Procedimiento	Descripción algebraica
Dado el N^0, digamos 80 hacer: 1) $110 - 80 = 30$ (N^0 de pollos) 2) $4(80)$ 3) $2(30) \approx 2(110 - 80)$ 4) $4(80) + 2(110 - 80)$ 5) $4(80) + 2(110 - 80) = 306$?	Dado un número, hacer 1) Restar el número dado de 110 2) Multiplicar por 4 el número dado 3) Multiplicar por 2 resultado de (1) 4) Sumar lo obtenido en (2) y (3) 5) Igualar 306 al resultado de (4)	Sea «x» el número dado 1) $110 - x$ 2) $4x$ 3) $2(110 - x)$ 4) $4x + 2(110 - x)$ 5) $4x + 2(110 - x) = 306$

Siendo $4x + 2(110 - x) = 306$, entonces $2x = 86$, luego $x = 43$ es el número de chivos que hay en la granja.

Actividad Nº 2

Resuelva cada uno de los planteamientos siguientes:

1. ¿Cuál es el número que multiplicado por 7 y disminuido en 6 da por resultado 29?
2. Si José tiene tres hermanas y cada hermana tiene un hermano, ¿Cuántos hermanos y hermanas son en total?
3. Un tanque puede almacenar 800 litros de agua; un grifo que vierte 10 litros por minuto ha estado abierto durante una hora, y otro que vierte 20 litros por minuto ha estado abierto por 5 minutos. ¿Cuántos litros de agua faltan para llenar el tanque?
4. Si el número 80 se divide en dos partes, de modo que la parte menor es la tercera parte de la mayor, entonces el número menor es:
5. La suma de dos números es 240 y su diferencia es 116. ¿Cuáles son los números?
6. La suma del triple de un número con el duplo de otro es 142 y la suma de sus mitades es 25. ¿Cuáles son los números?
7. En una jaula hay 58 animales entre conejos y gallinas, si todos son sanos y hay 180 patas. ¿Cuántos conejos hay en la jaula?
8. En su finca, Pedro tiene aves y caballos, si en total tiene 43 animales y 120 patas. ¿Cuántas aves hay en la finca?
9. A la pregunta ¿Cuántas gallinas y cerdos tienes? El granjero contesto, tengo 30 cabezas y 100 patas, calcule usted cuantas gallinas y cerdos tengo.
10. El menor de 5 hermanos tiene 21 años y cada uno de los otros le lleva tres años al que le sigue. ¿Cuántos años suman las edades?
11. Tres amigos tienen 46, 18 y 17 años de edad respectivamente. Cuanto tiempo ha de transcurrir para que la suma de las edades de los más jóvenes sea igual a la edad del mayor.
12. En 5 años, la edad de Jesús será el doble de la edad que tenía hace 6 años. En la actualidad, cuántos años tiene Jesús?
13. La edad de «x» es la mitad de la edad de «y»; la edad de «z» es el triple de la edad de «x» y la de «w» el doble de la de «z». Si las cuatro edades suman 132 años. ¿Qué edad tiene cada uno?
14. Un ganadero ha comprado doble número de vacas que de toros. Por cada vaca pago 70$ (dólares) y por cada toro 85 $. Si el importe de la compra fue de 2700 dólares. ¿Cuántas vacas y toros compro el ganadero?
15. Un estudiante compro triple número de lápices que de cuadernos. Cada lápiz le costó Bs 5 y cada cuaderno Bs 6. Si en total pago Bs 147. ¿Cuántos lápices y cuadernos compro?
16. El triple de un número es aumentado en tres, su resultado dividido entre tres y luego disminuido en tres para obtener tres, entonces este número es:
17. Cuál ha de ser la menor longitud en metros lineales que debe tener un rollo de tela, que desea cortarse exactamente en pedazos iguales de 12, 15 y 20 metros.

18. Seis hombres que trabajan simultáneamente, limpian un campo en 8horas ¿Cuántas horas tardaran cuatro de esos hombres en realizar el mismo trabajo?
19. La edad de un padre es cuatro veces la edad del hijo y en cinco años será su triple, entonces la edad del hijo es:
20. Se tienen tres cajas que contienen 160Kg, 200Kg y 320Kg de un material. El material está dividido en bloques del mismo peso y el mayor posible. ¿Cuántos bloques de ese material hay en total?
21. Cuando un pelotón de soldados se forma en filas de 2, de 3 o de 4 soldados, queda un hueco en la última fila. Sin embargo, cuando se forman en filas de 5 no quedan huecos. ¿Cuántos soldados hay en el pelotón?
22. Un trabajador recibe un 20% de incremento en su sueldo mensual pero el sindicato le descuenta 5%, luego el incremento mensual fue de:

El Conjunto de los Números Racionales $\mathbb{Q}$

De acuerdo a lo enunciado en un comentario precedente, si a y b son números enteros, la división $a \div b = c$ donde $a = b.c$, no siempre es un número entero. Esta imposibilidad conduce a ampliar el conjunto de los números enteros, a fin de que la división por un divisor no nulo, sea siempre posible; para ello, al entero $a \neq 0$ se le agrega su inverso « $\left(\frac{1}{a}\right)$», ampliando el producto, mediante la propiedad del número inverso, es decir $\left(\frac{1}{a}\right).a = a.\left(\frac{1}{a}\right) = 1$ con $a \neq 0$.

Ejemplo. La operación $2 \div 5$ es ahora posible, debido a que $2 \div 5 = 2.\left(\frac{1}{5}\right)$, lo cual se denota por $\frac{2}{5}$

Con esta ampliación se obtiene el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$, el cual se define como:

$$\mathbb{Q} = \left\{x: x = \frac{p}{q} \ \text{ con } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0\right\}$$

Cuando $p < q$ entonces el número $\frac{p}{q}$ es un racional propio.

Ejemplo. Los racionales $\frac{3}{4}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, -\frac{5}{8}$ son fracciones propias.

Cuando $\mathrm{p} = 0$ entonces el número $\left(\frac{p}{q}\right)$ es el racional nulo, si $p = q$ el número racional $\left(\frac{p}{q}\right)$ es la fracción unidad, si p es múltiplo de q, es decir $\mathrm{p} = k.q$, entonces el número $\left(\frac{p}{q}\right)$ es el entero K.

Ejemplo. Los números $\frac{27}{3}$ y $\frac{48}{16}$ corresponden a los enteros 9 y 3 respectivamente.

Cuando $p > q$ entonces el número $\left(\frac{p}{q}\right)$ es un racional impropio.

Ejemplo. Los número racionales $\frac{15}{7}, -\frac{14}{5}, \frac{13}{11}$ son fracciones impropias o mixtas. Estos números pueden escribirse como la suma de un entero más una fracción propia. En particular $\frac{15}{7} = 2 + \frac{1}{7}$; de igual modo $-\frac{14}{5} = -2 + \left(-\frac{4}{5}\right)$; y $\left(\frac{13}{11}\right) = 1 + \left(\frac{2}{11}\right)$.

Esta clasificación es de utilidad al momento de ubicar a los números racionales en la secuencia de puntos alineados. En esta tarea se sugiere representar primero a los enteros y, después de identificar el tipo de fracción, se le asigna el punto que le corresponde en el espacio comprendido entre los enteros. La figura ilustra esta tarea.

$$-2 \quad -\frac{3}{2} \quad -1 \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad \frac{3}{2} \quad 2$$

Intuitivamente, en cualquier segmento de esta secuencia de puntos, por pequeño que sea, hay infinitos puntos que pueden asociarse a números racionales, es decir, puntos que se acumulan en todas partes, caracterizando a $\mathbb{Q}$ como conjunto denso. Por ello, todas las magnitudes medibles tanto en la vida cotidiana como en la ciencia aplicada, pueden expresarse con buena aproximación mediante la utilización de números racionales.

COMENTARIO

Entre las fracciones, es de particular importancia, la que divide a la unidad en cien partes iguales, esta se conoce como el tanto por ciento de un número y se denota con el símbolo %. En particular, la fracción $\left(\frac{5}{100}\right)$ equivale a $5\,\%$.

El porcentaje de un número, es el producto de dicho número por la fracción que indica el porcentaje.

Ejemplo. El $60\,\%$ del número 70 se da por la expresión $70.\left(\frac{60}{100}\right) = 42$.

En general, el $n\,\%$ de un número P se calcula aplicando la identidad $\mathrm{P} = \mathrm{P}.\left(\frac{n}{100}\right)$; mientras que el aumento o disminución del número P en términos de porcentaje se determina con las expresiones $\mathrm{P}_1 = \mathrm{P}_0 + \mathrm{P}_0.\left(\frac{n}{100}\right)$ y $\mathrm{P}_1 = \mathrm{P}_0 - \mathrm{P}_0.\left(\frac{n}{100}\right)$ respectivamente. Aquí P_0 es el punto inicial, P_1 el nuevo punto y $\left(\frac{n}{100}\right)$ el porcentaje de aumento o disminución según sea el caso.

Ejemplo. Un artículo que costaba $\mathrm{B}s\,750.000$, debido a la devaluación de la moneda ahora cuesta $1.050.000$. ¿Cuál es el porcentaje de aumento que corresponde a dicha devaluación?

Siendo $\mathrm{P}_1 = \mathrm{P}_0 + \mathrm{P}_0.\left(\frac{n}{100}\right)$ entonces $1.050.000 = 750.000 + 750.000.\left(\frac{n}{100}\right)$, luego $\frac{1.050.000 - 750.000}{7500} = n$. En consecuencia $n = 40\%$ es el porcentaje de aumento.

Operaciones con Números Racionales

Adición. Si $\left(\frac{a}{b}\right)$ con $b \neq 0$ y $\left(\frac{c}{d}\right)$ con $d \neq 0$ son números racionales, entonces el número $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a.d + b.c}{b.d}$ también es un número racional.

Ejemplo. La suma entre los números racionales $\left(\frac{3}{5}\right)$ y $\left(\frac{2}{7}\right)$ es el número $\frac{3}{5} + \frac{2}{7} = \frac{3.7\ +\ 2.5}{5.7} = \frac{21\ +\ 10}{35} = \frac{31}{35}$

Sustracción. Sustraer o restar a un número racional $\left(\frac{a}{b}\right)$ con $b \neq 0$, otro número racional $\left(\frac{c}{d}\right)$ donde $d \neq 0$, no es otra cosa que sumar al racional $\left(\frac{a}{b}\right)$ el opuesto de $\left(\frac{c}{d}\right)$, que es $\left(-\frac{c}{d}\right)$, es decir: $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \left(-\frac{c}{d}\right) = \frac{a.d + (-c.b)}{b.d}$.

Ejemplo. Al restar $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{7}$ se tiene $\frac{3}{4} - \frac{5}{7} = \frac{3}{4} + \left(-\frac{5}{7}\right) = \frac{7.3 + 4(-5)}{28} = \frac{21 - 20}{28} = \frac{1}{28}$

Multiplicación. Sí $\left(\frac{a}{b}\right)$ y $\left(\frac{c}{d}\right)$ con $b \neq 0$ y $d \neq 0$ son números racionales, su producto $\left(\frac{a}{b}\right).\left(\frac{c}{d}\right) = \left(\frac{a.c}{b.d}\right)$ es otro racional con signo «+» o «−», según que los factores tengan el mismo o diferente signo.

Ejemplo. El producto entre $\left(\frac{2}{3}\right) \in \mathbb{Q}^{+}$ y $\left(\frac{5}{7}\right) \in \mathbb{Q}^{+}$ es $\left(\frac{2}{3}\right).\left(\frac{5}{7}\right) = \frac{2.5}{3.7} = \left(\frac{10}{21}\right) \in \mathbb{Q}^{+}$, pero si uno de los factores está en $\mathbb{Q}^{-}$, digamos $\left(-\frac{5}{7}\right)$ entonces $\left(\frac{2}{3}\right).\left(-\frac{5}{7}\right) = \frac{2.(-5)}{3.7} = \left(-\frac{10}{21}\right) \in \mathbb{Q}^{-}$.

COMENTARIO

Como ocurre en $\mathbb{Z}$, al producto del racional $\left(\frac{a}{b}\right)$ con $b \neq 0$ «n veces» por sí mismo, esto es $\left(\frac{a}{b}\right).\left(\frac{a}{b}\right).\left(\frac{a}{b}\right)...\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^{n}$ se le denomina potenciación en Q.

Ejemplo. La cuarta potencia de $\left(\frac{2}{3}\right)$ se escribe $\left(\frac{2}{3}\right)^{4} = \left(\frac{2}{3}\right).\left(\frac{2}{3}\right).\left(\frac{2}{3}\right).\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{81}$

Las propiedades de la potenciación en $\mathbb{Z}$ se extienden de manera natural a la potenciación en $\mathbb{Q}$. Además, se verifica que $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$ para cada $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

Ejemplo. La potencia $\frac{\left(\frac{14}{84}\right)^{-3}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right]^{3}}{\left[\left(\frac{1}{4}\right)^{2}\left(-\frac{2}{3}\right)^{3}\right]^{4}} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}\left(\frac{1}{2^{2}}\right)^{-3}}{\left(\frac{1}{2^{2}}\right)^{8}\left(-\frac{2}{3}\right)^{12}} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{3}(2)^{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{6}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{16}\left(\frac{2}{3}\right)^{12}} = \frac{2^{6+16}\left(\frac{2}{3}\right)^{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{6}} = \frac{2^{22}.\ 3^{9}}{2^{9}} = 2^{13}.3^{9}$

División. Si $\left(\frac{a}{b}\right)$, $\left(\frac{c}{d}\right)$ con $b \neq 0$, $c \neq 0$ y $d \neq 0$ son números racionales, su cociente $\left(\frac{a}{b}\right) \div \left(\frac{c}{d}\right) = \left(\frac{a}{b}\right).\left(\frac{d}{c}\right)$ es otro número racional, ajustado a la regla de los signos del producto.

Ejemplo. El cociente entre los racionales $\left(\frac{5}{8}\right)$ y $\left(\frac{3}{7}\right)$ es el racional $\left(\frac{5}{8}\right) \div \left(\frac{3}{7}\right) = \left(\frac{5}{8}\right).\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{35}{24}$

COMENTARIO

Aun cuando $\mathbb{Q}$ es denso, los números racionales no agotan la secuencia de puntos que conforman la recta numérica que se ha venido construyendo. Así, en el racional $\left(\frac{p}{q}\right)$ al efectuar la división de p entre q en el sistema decimal pude aparecer:

(a) Una expresión decimal exacta, ejemplo $\frac{5}{8} = 0{,}625$

(b) Una expresión decimal pura, ejemplo $\frac{25}{99} = 0{,}25252525\ldots$

(c) Una expresión decimal periódica mixta, ejemplo $\frac{127}{30} = 4{,}2333\ldots$

De manera inversa, dada una expresión decimal exacta o una expresión decimal periódica se le puede hacer corresponder un número de la forma $\frac{p}{q}$. Ejemplos:

(a) al decimal $0{,}625$ se asocia el racional $\left(\frac{5}{8}\right)$, es decir, $0{,}625 = 0{,}625.\left(\frac{1000}{1000}\right) = \frac{625}{1000} = \frac{5}{8}$;

(b) $0{,}252525\ldots$ equivale a $\left(\frac{25}{99}\right)$. En efecto, $0{,}252525.. = 0,\widehat{25}$; si $x = 0,\widehat{25}$

Así $100x = 25,\widehat{25}$, es decir $100x = 25 + x$ o bien $100x - x = 25$, luego $x = \left(\frac{25}{99}\right)$

(c) $4{,}2333\ldots$ equivale a $\left(\frac{127}{30}\right)$. En efecto $4{,}2333.. = 4{,}2\hat{3}$; siendo $x = 4{,}2\hat{3}$ entonces $10x = 42,\hat{3}$ o bien $10x = 42 + \lambda$, con $\lambda = 0,\hat{3}$. Pero $\lambda = 0,\hat{3}$ implica $10\lambda = 3 + \lambda$ esto es $9\lambda = 3$, luego $\lambda = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$. Luego $10x = 42 + \lambda$ implica $10x = 42 + \frac{1}{3}$, es decir $10x = \frac{127}{3}$ o bien $x = \frac{127}{30}$.

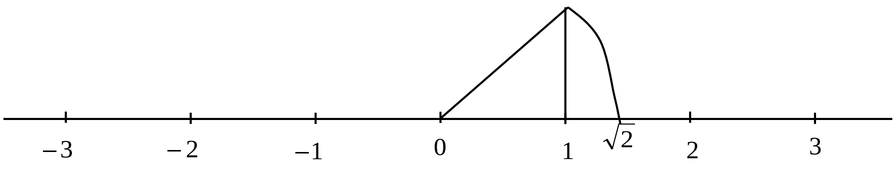
No obstante, expresiones decimales como $0{,}010010001\ldots$; $0{,}123456789012\ldots$; $\sqrt{2} = 1{,}414213561\ldots$; $\sqrt{3}$=1,732050807...; $\pi = 3{,}141592653589793\ldots$ donde no se observa un período y por ello no es posible asociarles un número de la forma $\left(\frac{p}{q}\right)$, es decir números no racionales, a los cuales se les llama irracionales debido a la imposibilidad de representarlos como la «razón» de dos enteros, complementan a $\mathbb{Q}$.

El Conjunto de los Números Irracionales I

Se llama así al conjunto que contiene todas las expresiones decimales infinitas «es decir, con infinitas cifras» no periódicas

$$\mathrm{I} = \left\{x : x \neq \frac{p}{q}\right\}$$

Estos números completan los puntos que hacen falta a la secuencia de puntos que se viene construyendo hasta conformar una recta continúa, es decir, que entre el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ junto con el conjunto de los irracionales I, se establece una biyección entre estos dos tipos de números y los puntos de la recta. Para representar, por ejemplo al irracional $\sqrt{2}$ en la recta, se hace coincidir el vértice de uno de los lados de longitud 1 de un triángulo isorectángulo con el origen 0 de la recta y luego con la abertura del compás igual a la longitud de la hipotenusa se lleva sobre la recta, tal como se indica en la figura.



Debido a la densidad de $\mathbb{Q}$, en la práctica, los números irracionales se grafican y expresan con la aproximación que se quiera través de números racionales. Así, el irracional $\sqrt{2}$ que en su expresión decimal tiene infinitas cifras decimales, se puede aproximar mediante racionales expresados por decimales finitos, como $1{,}4$; $1{,}41$; $1{,}414$; $1{,}4142$;….

El Conjunto de los Números Reales $\mathbb{R}$

Siendo $\mathbb{Q} \neq \mathrm{I}$ entonces $\mathbb{Q} \cap \mathrm{I} = \emptyset$, pero $\mathbb{Q} \cup \mathrm{I} = \mathbb{R}$ luego los números reales $\mathbb{R}$ comprenden tanto a los números racionales como a los números irracionales. En $\mathbb{R}$ se define las operaciones de adición y multiplicación con la axiomática siguiente:

Axiomática en $\mathbb{R}$

Axiomas de la Adición

1. $\forall a \in \mathbb{R}$ y $\forall b \in \mathbb{R}$, $\quad a + b = b + a \quad$ «la adición es conmutativa»
2. $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}$, $\quad a + (b + c) = (a + b) + c \quad$ «la adición es asociativa»
3. $\exists 0 \in \mathbb{R}$ tal que $\forall a \in \mathbb{R}$ $\quad a + 0 = 0 + a = a \quad$ «0 es el elemento neutro»
4. $\forall a \in \mathbb{R}, \exists -a \in \mathbb{R}$, $\quad -a + a = a + (-a) = 0 \quad$ «$-a$ es el opuesto de a»

Axiomas de la Multiplicación

1. $\forall a \in \mathbb{R}$ y $\forall b \in \mathbb{R}$, $\quad a.b = b.a \quad$ «la multiplicación es conmutativa»
2. $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}$ y $\forall c \in \mathbb{R}$ $\quad a.(b.c) = (a.b).c \quad$ «la multiplicación es asociativa»
3. $\exists 1 \in \mathbb{R}$ tal que $\forall a \in \mathbb{R}$ $\quad 1.a = a.1 = a \quad$ «1 es el elemento neutro»
4. $\forall a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$ $\exists a^{-1} \in \mathbb{R}$ $\quad a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1 \quad$ «a^{-1} es el inverso de a»

Axioma de Distributividad

1. $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}$ y $\forall c \in \mathbb{R}$, $\quad a.(b + c) = a.b + a.c$

Axiomas de Orden

2. $\forall a \in \mathbb{R}$ y $\forall b \in \mathbb{R}$, se cumple una y solo una de las relaciones siguientes:

   $a < b$ o $a = b$ o $a > b$ «Propiedad de tricotomía de los números reales»
3. Si $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$, con $a > 0$ y $b > 0$, entonces $a + b > 0$ y $a.b > 0$
4. Para todo $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$, $a < b$ si y sólo si $b - a > 0$

Operatividad en $\mathbb{R}$

1. La operatividad en $\mathbb{R}$ no ajustada a la normativa expresada en los axiomas de este conjunto lleva a conclusiones erróneas. Así, el clásico ejemplo de probar que $0 = 1$, pretende alertar al estudiante de razonamientos que lucen correctos cuando en realidad son incorrectos.

$$
\begin{aligned}
0 &= 0 + 0 + 0 + \cdots \\
&= (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots \\
&= 1 + \{-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots\} \\
&= 1 + \{(-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots\} \\
&= 1 + \{0 + 0 + 0 + \cdots\} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

2. El axioma de la asociatividad permite trascender el carácter binario de la operatividad en $\mathbb{R}$. En particular, la suma $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}$ puede ejecutarse asociando dos términos seguidos de su suma y este resultado se suma con el término restante, es decir:

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5} &= \left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right)+\frac{4}{5}\\ &= \left(\frac{8+9}{12}\right)+\frac{4}{5}\\ &= \frac{17}{12}+\frac{4}{5}\\ &= \frac{85+48}{60}\end{aligned}$$

Luego $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}=\frac{133}{60}$

3. El axioma de la distributividad o vinculación del producto con la suma amplia la operatividad en $\mathbb{R}$.

Ejemplo. En $\frac{2}{5}\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{7}\right)=\frac{2}{5}\left(\frac{3}{4}\right)+\frac{2}{5}\left(\frac{5}{7}\right)$

$$=\frac{3}{10}+\frac{2}{7}$$

Luego $\frac{2}{5}\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{7}\right)=\frac{41}{70}$

4. La aplicación de los axiomas de la suma, el producto, la distributividad y el orden, que caracterizan a $\mathbb{R}$ como cuerpo ordenado y completo, permite operar sin restricciones, sin menester de mencionar la propiedad o propiedades que se aplican cuando se ejecuta la operación.

Ejemplo. El número que resulta al operar $\left[\frac{\left(\frac{1}{3}+4^{-1}\right)-0,\widehat{6}\left(\frac{1}{2}+0,75\right)}{(2^{-1})^2+\frac{1}{2}\left(0,5-\frac{2}{3}\right)}\right]$ es:

$$\frac{\left(\frac{1}{3}+4^{-1}\right)-0,\widehat{6}\left(\frac{1}{2}+0,75\right)}{(2^{-1})^2+\frac{1}{2}\left(0,5-\frac{2}{3}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)}{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)}$$ «Proceso de transformación»

$$=\frac{\left(\frac{4+3}{12}\right)-\frac{2}{3}\left(\frac{2+3}{4}\right)}{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{3-4}{6}\right)}$$ «Proceso de operación»

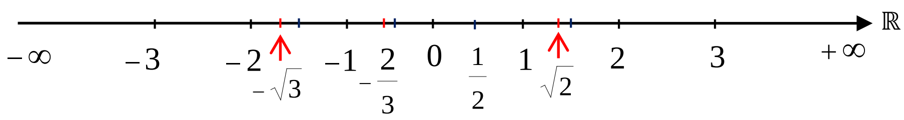
$$=\frac{\frac{7}{12}-\frac{5}{6}}{\frac{1}{4}-\frac{1}{12}}$$ «Proceso de operación y transformación»

$$=\frac{\frac{7-10}{12}}{\frac{3-1}{12}}$$ «Proceso de operación»

Luego $\frac{\left(\frac{1}{3}+4^{-1}\right)-0,\widehat{6}\left(\frac{1}{2}+0,75\right)}{(2^{-1})^2+\frac{1}{2}\left(0,5-\frac{2}{3}\right)}=-\frac{3}{2}$ «Proceso de operación y transformación»

Biyección entre $\mathbb{R}$ y la Recta Numérica

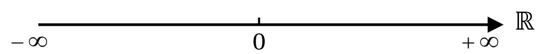
Cada número real se asocia a uno y sólo un punto de la recta numérica, con lo que se establece una biyección entre los puntos de esta recta y el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. Esta biyección se representa ubicando el número real «cero» en el centro de la recta, luego se ubica a los enteros, seguidos de los racionales e irracionales, mediante los procesos esgrimidos en el estudio de estos conjuntos, hasta lograr la ubicación de la muestra de números reales que se desee representar. La figura ilustra este proceso



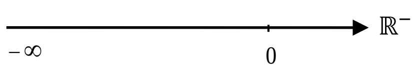
Subconjuntos Infinitos en $\mathbb{R}$

Los subconjuntos infinitos de $\mathbb{R}$ se denominan intervalos y corresponden a espacios métricos comprendidos entre dos valores reales, con las siguientes especificaciones:

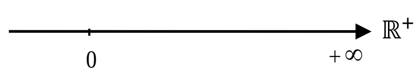
a. Los números reales $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. La figura exhibe su representación gráfica



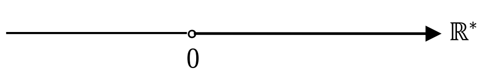
b. Los números reales negativos $\mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$, si se incluye a cero se escribe $\mathbb{R}^- \cup \{0\} = (-\infty, 0]$. Su representación gráfica se muestra en la figura



c. Los números reales positivos $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$, si estos incluyen a cero se tiene $\mathbb{R}^- \cup \{0\} = (-\infty, 0]$. Su representación gráfica se exhibe en la figura



d. Los números reales excluyendo a cero $\mathbb{R}^* = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. La representación gráfica se muestra en la figura



e. Intervalo cerrado $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x \leq b\}$. Su representación gráfica es:

f. Intervalo abierto $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}/a < x < b\}$. La representación gráfica es:

g. Intervalo semi-cerrado $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}/a \leq x < b\}$. La figura muestra su gráfica

h. Intervalo semi-abierto $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}/a < x \leq b\}$. La representación gráfica es:

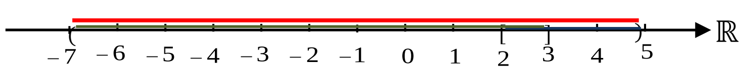
i. Intervalo a menos infinito $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq a\}$. Su representación gráfica es:

j. Intervalo al más infinito $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq a\}$. La representación gráfica es:

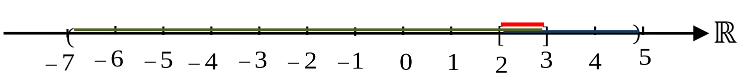
Operaciones entre Intervalos

Los intervalos pueden operarse mediante la unión y la intersección de conjuntos. Así, si A y B son intervalos, su «unión» AUB es un nuevo intervalo conformado por la parte común y no común de los dos intervalos, mientras que la «intersección» $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ es el intervalo conformado por la parte común entre los conjuntos A y B.

Ejemplo. Si $\mathrm{A} = [2, 5)$ o $\mathrm{A} = \{x \in \mathbb{R}/2 \leq x < 5\}$ y $\mathrm{B} = (-7,3] = \{x \in \mathbb{R}/-7 < x \leq 3\}$ son conjuntos su unión $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = [2,\ 5) \cup (-7,\ 3] = (-7,\ 5)$ o bien $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{\, x \in \mathbb{R}/ -7 < x < 5 \,\}$, su representación gráfica es el intervalo coloreado en rojo, exhibido en la figura



Mientras que $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = [2, 5) \cap (-7,\ 3] = (2,\ 3]$ o bien $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{\, x \in \mathbb{R}/2 < x \leq 3 \,\}$, su representación gráfica es el intervalo coloreado en rojo, mostrado en la figura



Desigualdades e Inecuaciones Lineales en $\mathbb{R}$

Los axiomas de orden derivan las siguientes propiedades de las desigualdades:

a. *Transitiva*. Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$.

En efecto. $a < b$ y $b < c$ implica $b - a > 0$ y $c - b > 0$ luego $(b - a) + (c - b) > 0$ esto es $c - a > 0$ o bien $a < c$.

Ejemplo. Siendo $\left(\frac{1}{3}\right) < \left(\frac{2}{3}\right)$ y $\left(\frac{2}{3}\right) < \left(\frac{3}{4}\right)$ entonces $\left(\frac{1}{3}\right) < \left(\frac{3}{4}\right)$.

b. *Adición*. Para $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$. Siendo $a < b$ entonces $a + c < b + c$.

En efecto. $a < b$ y $c \in \mathbb{R}$ implica $b - a > 0$ luego $(b - a) + c > 0 + c$ o su equivalente $b + c > a + c$. En consecuencia $a + c < b + c$.

Ejemplo. Siendo $\left(\frac{2}{3}\right) < \left(\frac{3}{4}\right)$ y $\left(\frac{1}{2}\right) \in \mathbb{R}$ entonces $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) < \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right)$ o bien $\left(\frac{7}{6}\right) < \left(\frac{5}{4}\right)$.

c. *Producto*, para $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces $a < b$ y $c > 0$ implica $a.c < b.c$ «la desigualdad permanece», mientras que $a < b$ y $c > 0$ implica $a.c > b.c$ «la desigualdad cambia de sentido»

Ejemplo. Siendo $\left(\frac{1}{2}\right) < \left(\frac{2}{3}\right)$ $4 < 7$ y $\left(\frac{3}{4}\right) \in \mathbb{R}^+$, entonces $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right) < \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right)$ o bien $\left(\frac{3}{8}\right) < \left(\frac{1}{2}\right)$; mientras que para $\left(-\frac{3}{4}\right) \in \mathbb{R}^-$ se tiene $\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{4}\right) > \frac{2}{3}\left(-\frac{3}{4}\right)$ o bien $\left(-\frac{3}{8}\right) > \left(-\frac{1}{2}\right)$.

Cuando los miembros de una desigualdad contienen variables, ésta compone una inecuación, la solución a este objeto matemático es un intervalo de números reales. Las inecuaciones de la forma $ax + b < c$ o reducibles a ella son inecuaciones lineales en una variable. Su conjunto solución se halla aplicando las propiedades de las desigualdades.

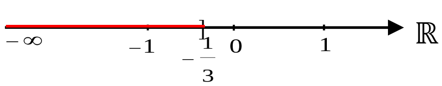
Ejemplo 1. Al hallar el conjunto solución de la desigualdad «inecuación» $3x + 5 \leq 4$, se tiene que:

$3x + 5 \leq 4$ implica $3x + 5 + (-5) \leq 4 + (-5)$ «carácter aditivo, propiedad b»

$3x \leq -1$ «ejecutando operaciones»

$3x \leq -1$ implica $3x.\left(\frac{1}{3}\right) \leq -1\left(\frac{1}{3}\right)$ «carácter multiplicativo, propiedad c»

Luego $3x + 5 \leq 4$ implica $x \leq -\frac{1}{3}$, luego $S = \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right] = \left\{x \in \mathbb{R} / x \leq -\frac{1}{3}\right\}$, su representación gráfica se muestra en la figura



Ejemplo 2. Al hallar el conjunto solución de la inecuación $4x + \frac{2}{5} \geq -7x + 3$ se tiene que:

Como $4x + \frac{2}{5} \geq -7x + 3$ implica $4x + (+7x) + \frac{2}{5} \geq -7x + (+7x) + 3$ «propiedad b»

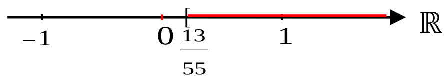
$11x + \frac{2}{5} \geq 3$ «ejecutando operaciones»

$11x + \frac{2}{5} + \left(-\frac{2}{5}\right) \geq 3 + \left(-\frac{2}{5}\right)$ «propiedad b»

$11x \geq \frac{13}{5}$ «ejecutando operaciones»

$11x.\left(\frac{1}{11}\right) \geq \frac{13}{5}.\left(\frac{1}{11}\right)$ «propiedad c»

En consecuencia $x \geq \frac{13}{55}$, luego $S = \left[\frac{13}{55}, +\infty\right)$ o bien $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq \frac{13}{55}\right\}$, la figura adjunta muestra su representación gráfica



En la práctica se omite explicitar las operaciones y propiedades que se aplican en la búsqueda del conjunto solución. En su lugar, se movilizan términos y factores como si se fuese una ecuación.

Ejemplo. En la búsqueda de solución a la inecuación $\frac{1}{2}x + 0,\hat{6}(x-1) + 0,25(x+2) \leq 2x - 0,75$ se tiene:

$$\frac{1}{2}x + 0,\hat{6}(x-1) + 0,25(x+2) \leq 2x - 0,75 \Rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}(x-1) + \frac{1}{4}(x+2) \leq 2x - \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}x - 2x \leq -\frac{3}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{6x + 8x + 3x - 24x}{12} \leq \frac{-9 + 8 - 6}{12}$$

$$\Rightarrow -7x \leq -7$$

$$\Rightarrow x \geq 1 \text{ o bien } S = [1, +\infty)$$

COMENTARIO
Sobre el tema de las inecuaciones se volverá una vez estudiado el apartado correspondiente a las expresiones algebraicas.

Radicación en $\mathbb{R}$.

Si $a \in \mathbb{R}$ y n es un número natural, entonces la raíz n-ésima de «a» denotada por $\sqrt[n]{a}$ es un número real «b» si «a» es la potencia n-ésima de «b». En símbolos $\sqrt[n]{a} = b$ siempre que $b^n = a$.

Ejemplos. La $\sqrt[5]{243} = 3$ ya que $3^5 = 243$. De igual modo, la $\sqrt[4]{625} = \pm 5$ debido a que $(\pm 5)^4 = 625$

COMENTARIO
Como $a^m = (a^{\frac{m}{n}})^n$ entonces $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$. Luego los radicales componen potencias con exponentes fraccionarios, ejemplo $\sqrt[5]{243} = \sqrt[5]{3^5} = 3^{\frac{5}{5}} = 3$.

Propiedades de los Radicales y Operatividad

Producto de Radicales con índice o Raíz de un Producto

La $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}.\sqrt[n]{c}\ldots\sqrt[n]{p}=\sqrt[n]{a.b.c\ldots p}$. En particular $\sqrt[3]{2a}.\sqrt[3]{5b}.\sqrt[3]{3ab}=\sqrt[3]{2a.5b.3ab}=\sqrt[3]{30a^2b^2}$, de manera inversa $\sqrt{1296a^4b^6}=\sqrt{2^4.3^4.a^4.b^4}=\sqrt{2^4}.\sqrt{3^4}.\sqrt{a^4}.\sqrt{b^6}=2^2.3^2.a^2.b^3=36a^2b^3$

Cociente de Raíces con igual índice o Raíz de un Cociente

El cociente $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$. Ejemplo $\frac{\sqrt[5]{2ax^4}.\sqrt[5]{3yb^2}}{\sqrt[5]{xy}.\sqrt[5]{5ab}}=\sqrt[5]{\frac{(2ax^4)\,(3yb^2)}{(xy)(5ab)}}=\sqrt[5]{\frac{6bx^3}{5}}$. De manera inversa, la raíz del cociente $\sqrt[3]{\frac{8a^6b^9}{27x^{12}y^{15}}}=\frac{\sqrt[3]{2^3a^6b^9}}{\sqrt[3]{3^3x^{12}y^{15}}}=\frac{\sqrt[3]{2^3}.\sqrt[3]{a^6}.\sqrt[3]{b^9}}{\sqrt[3]{3^3}.\sqrt[3]{x^{12}}.\sqrt[3]{y^{15}}}=\frac{2a^2b^3}{3x^4y^5}$

Un número o factor de un número se extrae de un radical en el caso de que sea raíz exacta, tal como se muestra $\sqrt{\frac{3a^2b^2c^9}{32x^9y^5}}=\sqrt{\frac{3\,a^2\,b^2\,c^8.\,c}{2^4.2.x^8.\,x.y^4.\,y}}=\frac{abc^4}{4x^4y^2}\sqrt{\frac{3c}{2xy}}$

En forma inversa, para introducir un factor en un radical, se eleva el factor a una potencia igual al índice del radical. En particular, $\frac{x.\,y^2}{m^5.\,n}\sqrt[5]{\frac{x^2.\,y^3}{n.\,c^4}}=\sqrt[5]{\left(\frac{x.\,y^2}{m^5.\,n}\right)^5\left(\frac{x^2.y^2}{n.c^4}\right)}=\sqrt[5]{\frac{x^2\,y^{12}}{m^{25}\,n^6\,c^4}}$

Si los radicales tienen diferentes índices, su producto y/o cociente se efectúa una vez que estos radicales se han ampliado a otros radicales equivalentes con igual índice.

Ejemplo. $\frac{\sqrt[3]{2xy}.\sqrt[4]{5yz^2}}{\sqrt{2axz}}=\frac{\sqrt[3.4]{(2xy)^4}.\sqrt[4.3]{(5yz^2)^3}}{\sqrt[2.6]{(2axz)^6}}=\frac{\sqrt[12]{2^4x^4y^4}.\sqrt[12]{5^3y^3z^6}}{\sqrt[12]{2^6a^6x^6z^6}}=\sqrt[12]{\frac{2^4.5^3.x^4.y^7.z^6}{2^6.a^6.x^6.z^6}}=\sqrt[12]{\frac{125y^7}{4a^6x^2}}$, donde el nuevo índice $12=\mathrm{m.c.m.}(2,3,4)$.

Raíz de una Raíz

La raíz $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n.m]{a}$. En particular $\sqrt{2am^4\sqrt[3]{3a^2m}}=\sqrt{\sqrt[3]{(2am^4)^3(3a^2m)}}=\sqrt[6]{24a^5m^{13}}=m^2\sqrt[6]{24a^5m}$

Radicales Semejantes.

Los radicales que tienen el mismo índice e igual cantidad sub-radical son semejantes y pueden sumarse o restarse según sea el caso.

Ejemplo. La expresión $2\sqrt{32}-3\sqrt{2}+\frac{1}{3}\sqrt{8}=2\sqrt{2^4.2}-3\sqrt{2}+\frac{1}{3}\sqrt{2^2.2}=8\sqrt{2}-3\sqrt{2}+\frac{2}{3}\sqrt{2}=\frac{17}{3}\sqrt{2}$.

Racionalización.

Racionalizar el denominador o numerador de una fracción radical es transformar la fracción dada en otra equivalente, pero sin radicales en el denominador o numerador según el caso.

Ejemplos. La racionalización $\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$; del mismo modo la racionalización $\frac{2}{\sqrt[4]{27}}=\frac{2}{\sqrt[4]{3^3}}.\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{3}}=\frac{2\sqrt[4]{3}}{3}$; finalmente, al racionalizar $\frac{10}{\sqrt{3}+1}=\frac{10}{(\sqrt{3}+1)}\frac{(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}-1)}=\frac{10\,(\sqrt{3}-1)}{2}=5(\sqrt{3}-1)$.

Actividad Nº 3

I. Realice cada una de las operaciones siguientes, cuando sea posible simplifique los resultados

1) $\frac{10}{16}+\frac{3}{36}$

2) $\frac{4}{50}-\frac{3}{60}$

3) $\frac{1}{2}+\left(-\frac{4}{5}\right)+\frac{3}{12}$

4) $\frac{1.2+3.4+5.6}{1.2.3.4.5.6}-\frac{11}{180}$

5) $\frac{1.3}{3.4}+\frac{1}{2}-\left(\frac{2+3}{1.2.3}\right)$

6) $\frac{2}{26}-\left(\frac{3-12}{81}\right)-\frac{3}{13.3.1}$

7) $\frac{2.11.13}{143}+\frac{3.91}{7.13}-\frac{4}{5}$

8) $\frac{1}{504}+\frac{1}{2^3.3^2.7}-\frac{1}{252}+\frac{1}{2^2.3^3.7}$

9) $\left(\frac{-2}{3}\right)+\left(\frac{2}{-5}\right)+\left(\frac{-3}{-7}\right)$

10) $\frac{-3}{5}\left(\frac{3}{-4}+\frac{-4}{2^4}\right)-0{,}25(\frac{2}{5}-1)$

11) $\left(\frac{-1}{2}\right)+0{,}24\left(\frac{1}{3}+5+\frac{5}{3}-2\right)$

12) $\frac{-4}{10}\left(\frac{1}{7}\right)\left(\frac{-7}{4}\right)+0{,}6\div\left(\frac{6}{9}\right)-\left(\frac{\frac{2}{4}}{\frac{3}{5}}\right)$

13) $\left(\frac{2}{5}\right)+0{,}8333\ldots-0{,}75+\left(\frac{1}{2}\right)^2$

14) $\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}-2+\frac{2}{4}\right)+\sqrt{\frac{16}{81}}\div 0{,}333\ldots$

15) $\left[\left(\frac{5}{8}-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}-\frac{3}{5}+1\right)\div\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}-\frac{5}{6}+1\right)\right]+2-\left(\frac{2}{3}\right)^2\div\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{5}\right)^2(25)$

16) $-\frac{3}{4}+\left\{-\frac{4}{6}\left[\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}+2\right)-\frac{4}{5}\right]-\left[\frac{3}{5}\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{6}\right)^{10}+\frac{8}{10}\right]-\frac{4}{3}\right\}+\frac{2.3.4}{18}$

17) $\left\{\left[2+\frac{1}{3}-\left(1+\frac{1}{6}\right)\right]\div\left[3+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{12}\right)+0{,}125\left(\frac{1}{8}\right)^{-1}-1\right]\right\}+\frac{3}{7}\div(-\frac{12}{28})$

18) $\frac{\frac{4}{10}\div\left(-\frac{2}{5}\right)}{\frac{5}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}}+\frac{1-0{,}24\left(\frac{5}{2}\right)-\frac{1}{4}}{\frac{2}{5}+\frac{2}{3}-1}+0{,}36\left\{\frac{\frac{2}{5}-\frac{3}{4}\left[2+0{,}4\left(\frac{5}{2}-1\right)\right]+\frac{1}{3}}{0{,}2\left(\frac{3}{4}\right)+0{,}333\ldots\left(\frac{3}{2}-3\right)}\right\}+\frac{3}{5}$

19) $\left[\frac{\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)\div 4}{\left(\frac{3}{2}-2\right)\left(\frac{5}{2}\right)}\right]\div\left[\frac{\frac{0{,}625}{(0{,}6)^3}}{\left(\frac{5}{3}\right)^3}\right]+\left[\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{1-\left(\frac{1}{3}\right)}}\right]\left[\frac{\frac{3}{2}}{-3+\frac{4}{-5+\left(\frac{1}{3}\right)}}\right]$

20) $\frac{35\,x^6\,y^2\,z^3\,w^5}{245\left(x^{\frac{3}{2}}yz^2\right)^2}$

21) $\frac{45abc(ab^{-1})}{5ab^3c^4\ (c^{-1}d)^2}$

22) $\frac{(a^3b^5c^{-2})^{-3}\,a^3\,b^4\,(c^{-2})^2}{(a^4bc^5)^2\,(a^3bc^{-1})^{-2}}$

23) $\frac{(2a^2bc^3)^{-\frac{2}{3}}\,(3abc^2)^{\frac{3}{4}}}{(2ab^2)^{\frac{1}{6}}\,(6a^2bc^4)^{-\frac{5}{3}}}$

24) $\frac{\left(-\frac{7}{8}\right)^2\left(\frac{3}{7}\right)^5\left(-\frac{1}{3}\right)^5}{\left(-\frac{1}{8}\right)^6\left(\frac{8}{9}\right)^3}$

25) $\frac{\left[\left(\frac{x}{y}\right)^8\left(\frac{a}{b}\right)^2\left(\frac{y}{x}\right)^3\right]^7}{\left(\frac{x}{y}\frac{a}{b}\right)^3\left(\frac{a}{b}\right)^{-4}}$

26) $\frac{\sqrt{4a^3bc}\ \sqrt{2ab^2c^3}}{\sqrt{6abc}}$

27) $\left(\sqrt[5]{\frac{3a^3b^2d}{2x^2y}}\right)^3$

28) $\left[\left(\sqrt[3]{\frac{a-b}{a^2-ab+b^2}}\right)\left(\sqrt[3]{\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}}\right)\right]$

29) $\frac{2b\sqrt[3]{2a\sqrt{2ab\sqrt[4]{2ab^3}}}}{2ab^2\sqrt[12]{2^2a^8b^{11}}}$

30) $\left[\frac{\frac{\left(2a\sqrt[3]{3a^2b}\right)\left(\sqrt{2ab}\right)^3}{\left(\sqrt[4]{4a^3b^2x}\right)}}{\left(ab\sqrt[6]{\frac{2a^5}{3b}}\right)}\right]$

31) $\frac{\left(\sqrt[3]{\frac{3\,x^2ym^4}{nc}}\right)^4\left(\sqrt[5]{\frac{x^5mn}{c}}\right)}{\sqrt[4]{\frac{8\,c^3\,n\,a}{m^2y^2}}}$

32) $\dfrac{\left[2am\sqrt[4]{3a^2mb\,(6a^3mb)^{\frac{1}{6}}}\right]^{\frac{1}{12}}}{\sqrt{a\sqrt[3]{2ab\sqrt[4]{3a^2b}}}}$

33) $\dfrac{\left(\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)\left(\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)}{\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}}$

34) $2\sqrt{32}+2\sqrt{8}-3\sqrt{2}+\frac{2}{5}\sqrt{128}$

35) $\frac{2}{7}\sqrt{48}-\frac{3}{21}\sqrt{75}-7^{-1}\sqrt{108}$

36) $\sqrt{12}+\frac{5}{4}\sqrt{27}-0,\widehat{6}\sqrt{3}-0,25\sqrt{75}+\frac{3}{4}\sqrt{48}-\frac{2}{5}\sqrt{108}+\frac{1}{2}\sqrt{300}+\frac{1}{4}\sqrt{243}$

37) $3ab\sqrt[3]{ab^2}+2\sqrt[3]{27\,a^4b^5}-5ab\sqrt[6]{a^2b^4}+\frac{2}{3}\,ab\sqrt[6]{a^2b^4}-\frac{2}{5}\sqrt[3]{8a^4b^5}$

38) $\frac{3}{4}\sqrt{5}-0,125\sqrt[3]{7}-\frac{1}{3}\sqrt[3]{875}-\frac{1}{5}\sqrt{180}+1,2\sqrt[3]{189}-\frac{1}{7}\sqrt[3]{56}+\frac{2}{5}\sqrt{125}$

39) $\sqrt[3]{81}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{24}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{81}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{375}-0,75\sqrt[3]{375}+\frac{1}{5}\sqrt[3]{1029}$

40) $3\sqrt{a-b}-\sqrt{(a-b)(a^2-2ab+b^2)}+\sqrt[4]{(a-b)^2}+\sqrt{4a-4b}$

41) $\frac{3}{5}\sqrt{5}+\frac{2}{3}\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{56}-\frac{2}{5}\sqrt{125}-\frac{2}{7}\sqrt[3]{2401}+\frac{0,25}{3}\sqrt{80}-\frac{3}{4}\sqrt[3]{448}$

II. Racionalizar las siguientes expresiones

1) $\frac{102}{\sqrt{3}}$

2) $\frac{25}{\sqrt{5}}$

3) $\frac{7b}{\sqrt{7ab^3}}$

4) $\frac{5}{\sqrt[3]{25}}$

5) $\frac{2x}{\sqrt[5]{8x^3}}$

6) $\frac{6x}{\sqrt[3]{3x^3}}$

7) $\frac{x-y}{\sqrt{x^2-y^2}}$

8) $\frac{14}{2\sqrt[3]{3x-2}}$

9) $\frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x-y}}$

10) $\frac{4}{5+\sqrt{5}}$

11) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

12) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

13) $\frac{3\sqrt{6}}{\sqrt[4]{3}(\sqrt{2}-\sqrt{6})}$

14) $\frac{3a}{\sqrt[4]{a^4+b^4}}$

15) $\frac{2}{\sqrt{2}[(\sqrt{3}+\sqrt{2})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})]}$

16) $\frac{2\sqrt{5}+3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$

17) $\frac{\sqrt{x-2}+1}{\sqrt{x-2}+2}$

18) $\frac{\sqrt{x-y}+\sqrt{y}}{\sqrt{x-y}-\sqrt{y}}$

19) $\frac{2a+\sqrt{1-4a^2}}{2a-\sqrt{1-4a^2}}$

20) $\frac{a-b}{\sqrt[3]{\sqrt{a}-\sqrt{b}}}$

21) $\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$

III. Encuentre la solución a las siguientes ecuaciones

1) $-\frac{3}{5}\left(x+\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)=3$

2) $5x+\frac{3}{4}x-0,5x-1,4=\frac{2}{3}x+1$

3) $0,125x+\frac{2}{5}x+0,\hat{3}x-1=4$

4) $\frac{2}{3}x+0,25=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$

5) $\frac{2x-5}{3}+\frac{3x-2}{4}=x+\frac{1}{5}$

6) $(x^{-1}+0,5)^{-1}=5.10^{-1}$

7) $\frac{3x+2}{2}+\frac{x}{6}=\frac{4x-1}{5}+\frac{x}{3}$

8) $x+(x+1)+(x+2)=30$

IV. Encuentre el valor de k que hace verdadera a las identidades siguientes:

1) $\frac{2}{3}=\frac{k}{9}$

2) $\frac{2+k}{k+3}=\frac{2}{3}$

3) $\frac{k+1}{10}=\frac{3}{5}$

4) $\frac{2(1+k)}{(k+2)+1}=\frac{4}{3}$

5) Si $\sqrt{x+2}=2$ entonces el valor de $(x+2)^2$ es:

6) ¿Qué valor de x hace cierta la igualdad $\sqrt{\sqrt{x+17}}=2$

7) ¿Cuál es el valor de x en $\sqrt{x-4} = \sqrt{x-1} - 1$?

8) Si $\sqrt[3]{x-6} = 2$, entonces el valor de y en $x + \sqrt{y+1} = 16$ es:

9) ¿Cuánto vale y en $\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{y+5}} = 1$, para $x = 4$?

V. Encuentre la solución a los siguientes planteamientos:

1. Defina y grafique los siguientes intervalos en $\mathbb{R}$

1.a $[-3, \sqrt{5}]$; 1.b $\left(-\sqrt{7}, \frac{3}{4}\right]$; 1.c $\left(-\frac{13}{5}, \frac{\sqrt[3]{8}}{7}\right)$; 1.d $\left(-\infty, \frac{2}{5}\right)$; 1.e $\left[\frac{\sqrt{5}}{3}, +\infty\right)$;

2. Dados $A = [-\sqrt{3}, 4]$; $B = \left(-2, \frac{3}{5}\right)$; $C = \left(-\frac{2}{9}, \frac{15}{7}\right)$; $D = \left[-\frac{2}{3}, 4\right)$; determine:

2.a $A \cap B$; 2.b $A \cap D$; 2.c $C \cap D$; 2.d $A \cup B$; 2.e $A \cup D$ 2.f $A \cap (B \cup D)$;

3. Encuentre el conjunto solución de las inecuaciones siguientes:

3.a $\frac{2}{3} + \frac{x}{5} < \frac{1}{3} + x$; 3.b $x + \sqrt{3} > \frac{2}{3}x + 2\sqrt{3}$; 3.c $\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} \leq -\sqrt{2} + \frac{x}{2}$;

3.d $\frac{1}{2^{-1}}\left(\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}\right) - 2(x-1) \leq \frac{2}{5}\left(5x + \frac{5}{2}\right)$; 3.e $3\left(2x + \frac{\sqrt{2}}{3}\right) + 2\left(x + \frac{3}{2}\right) \geq 5(x-2) + \frac{1}{2}$;

3.f $0,\hat{3}(3x+6) + 0{,}2(5x+10) < 0,\hat{6}\left(1 - \frac{1}{2}\right)$; 3.g $\frac{x}{3} + \frac{2}{5} > 3x - \frac{2}{3}\left(\frac{3x}{2} + 1\right)$;

VI. Resuelva cada uno de los planteamientos siguientes:

1) Juan, Pedro, Jesús y María comparten una torta; Juan se come dos sextas partes, Pedro la tercera parte y Jesús la sexta parte. ¿Cuánto le dejaron a María?
2) ¿Cuánto costó un artículo que al venderse en Bs 900 reportó una pérdida de $\frac{2}{5}$ respecto de su precio?
3) ¿Cuánto falta por pavimentar de una carretera donde se ha pavimentado las $\frac{16}{25}$ de ésta?
4) ¿Cuál es el 15% de 32?
5) ¿De qué número es 136 el 80%?
6) Un televisor que hace dos meses costaba Bs 750000, hoy cuesta $1.050.000$ ¿En qué porcentaje aumentó el precio del televisor?
7) Si en 12000 Kg de naranjas, el 20% es de naranja pequeña y las medianas son los $\frac{2}{3}$ del resto. ¿Cuántos son los kilos de naranjas grandes?
8) Descuentos sucesivos de 20% y 30% son equivalentes a un único descuento de?
9) Si a un producto cuyo precio es Bs 5000 se le hace un descuento del 30% y luego otro del 20%, ¿Cuál será el precio final del producto?
10) En un colegio de 1300 alumnos, el 25% son extranjeros y de ellos el 40% son colombianos. ¿Cuántos colombianos hay en el colegio?
11) ¿Cuánto cuesta un almuerzo, si el recibo es por Bs 690 y están incluidos el 10% de servicio y el 5% del cubierto?

12) Un comerciante conviene en pagar a su ayudante un décimo de la ganancia que obtenga su comercio en un mes. Después de pagarle lo convenido al ayudante, al comerciante le queda una ganancia neta de Bs 100800. ¿Qué ganancia produjo el comercio en el mes?

13) Si a los términos de una fracción se le suma 1 la fracción toma como valor $\frac{2}{3}$ y si se le resta 2 la fracción toma valor $\frac{1}{2}$. ¿Cuál es la fracción?

14) Hace quince años la edad de María era el triple de la edad de Ana, pero ahora la edad de María dobla a la edad de Ana. ¿Qué edades tienen actualmente?

15) Un objeto vale Bs 1000, al pasar del mayorista al vendedor el precio se recarga en un 5% y luego se vende con un nuevo aumento del 10%. ¿Cuál es el precio de venta al público de este artículo?

16) Halle dos números tales que su suma sea 37 y que al dividir el mayor por el menor, su cociente es 3 y resto 5?

17) Una persona gastó la mitad de su dinero y luego la tercera parte de lo que le quedaba. ¿Qué proporción de dinero ha gastado?

18) Un padre distribuyó una bolsa de caramelos a sus hijos, de manera que un hijo recibió la mitad, otro una cuarta parte, otro una quinta parte y el último 7 caramelos. ¿Cuántos caramelos tenía la bolsa?

19) Un jugador ha perdido los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{4}{5}$ de Bs 450. ¿A cuando asciende la perdida?

20) Un padre le propuso a su hijo que por cada problema que resolviera le daría Bs 30, pero por cada uno de los no resueltos le quitaría Bs 10. Fueron 100 los problemas propuestos al muchacho y al final obtuvo una ganancia de Bs 2300. ¿Cuántos problemas resolvió?

21) Un chorro llena un tanque en 20 minutos y su desagüe lo vacía en 30 minutos. ¿Cuánto tarda en llenarse el tanque estando vacío si el chorro y desagüe se abren simultáneamente?

22) Antes de un aumento de precios, un producto costaba 600 Bs. Después del aumento paso a costar 960 Bs. ¿qué tanto por ciento aumento el producto?.

CAPÍTULO 2: EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Se llama expresión algebraica a cualquier combinación de números y letras «que representan números» donde están indicadas una o más operaciones fundamentales.

Ejemplos. Los objetos matemáticos $3x^2 - 2x + 8$; $4a^3b^3c^7$; $2pq\sqrt[5]{7p^2q^3}$ y $(3x^2 + 2y)^5$ son expresiones algebraicas.

Las expresiones algebraicas que contienen a otras más simples, entre las cuales se indican sumas y diferencias, se denominan sumas algebraicas. Cada uno de los sumandos se llama «términos» de la expresión.

En un término, cualquier factor o producto de factores se llaman «coeficiente/s» del resto del término.

Son términos semejantes los que tienen las mismas letras e igual los exponentes.

Ejemplo. La expresión $\frac{2}{5}x^4$ es semejante a $\frac{9}{25}x^4$ y $\frac{3a^5b^3}{2x^7z^4}$ es semejante a $\frac{\sqrt[3]{12}a^5b^3}{\sqrt{5}x^7z^4}$.

Operaciones con Expresiones Algebraicas

Adición. Para hallar la suma entre dos o más expresiones algebraicas se utiliza el axioma de la asociatividad a partir del cual se reduce a uno todos los términos semejantes.

Ejemplo. En

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}x - \left(\frac{3}{4}y - 2x\right) - \left\{y - \left[\frac{3}{5}x - (3x - 4y)\right] + 5y\right\} &= \frac{2}{3}x - \frac{3}{4}y + 2x - \left\{y - \frac{3}{5}x + 3x - 4y + 5y\right\} \\ &= \frac{2}{3}x - \frac{3}{4}y + 2x - y + \frac{3}{5}x - 3x + 4y - 5y \\ &= \frac{2}{3}x + 2x + \frac{3}{5}x - 3x - \frac{3}{4}y - y + 4y - 5y \\ &= \frac{4}{15}x - \frac{11}{4}y\end{aligned}$$

Multiplicación. Para multiplicar dos o más expresiones algebraicas se utiliza el axioma de la distributividad de la multiplicación con respecto a la adición junto a las propiedades de la potenciación.

Ejemplos.

(1) $\frac{3}{4}xy\left(\frac{4}{3}x^2y^3 + 16xy - \frac{5}{3}\right) = x^3y^4 + 12x^2y^2 - \frac{5}{4}xy$

(2) $(2a^2 - b)(a^3 + 5b^2) = 2a^5 + 10a^2b^2 - a^3b - 5b^3$

(3) $(x^2 - xy + y^2)(x - 2xy) = x^3 - 2x^3y - x^2y + 2x^2y^2 + xy^2 - 2xy^3$

Productos Notables.

1) $a.(b + c) = a.b + a.c$; «Producto de un monomio por un binomio»

Ejemplo. $3x(2x - 5) = 6x^2 - 15x$.

2) $(ax + b)(cx + d) = acx^2 + adx + bcx + bd = acx^2 + (ad + bc)x + bd$; «Producto entre dos binomios»

Ejemplo. $\left(\frac{3}{4}x + 2\right)\left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{10}x + \frac{2}{3}x - \frac{4}{5} = \frac{1}{4}x^2 + \frac{11}{30}x - \frac{4}{5}$

3) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; «Binomio cuadrado perfecto»

Ejemplo. $\left(\frac{2}{7}x + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{4}{49}x^2 + \frac{5}{7}x + \frac{25}{16}$

4) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; «Binomio cuadrado perfecto»

Ejemplo. $(4x - 7y)^2 = 16x^2 - 56xy + 49y^2$

5) $(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ab + b^2 = a^2 - b^2$; «Suma por diferencia- Diferencia de cuadrados»

Ejemplo. $\left(\frac{3}{4}x + \frac{1}{5}\right)\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{5}\right) = \frac{9}{16}x^2 - \frac{1}{25}$

6) $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; «Binomio (suma) al cubo»

Ejemplo. $(3x+2)^3 = 27x^3 + 54x^2 + 36x + 8$

7) $(a-b)^3 = (a-b)(a-b)(a-b) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$; «Binomio (diferencia) al cubo»

Ejemplo. $(2y - 3x)^2 = 8y^3 - 36y^2x + 54yx^4 - 27x^3$

8) $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$; «Diferencia de cubos»

Ejemplo. $(2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2) = 8x^3 - y^3$

9) $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3$; «Suma de cubos»

Ejemplo. $(3a + b)(9a^2 - 3ab + b^2) = 27a^3 + b^3$;

División de Expresiones Algebraicas

División de un polinomio por un monomio. Para dividir un polinomio por un monomio se divide cada término del polinomio por el monomio, lo cual es posible, ya que la división es distributiva con respecto a la adición.

Ejemplo. Al dividir $(6a^3b^2 - 12a^5b^3 + 24a^8b^5 - 18a^7b^6) \div (6a^3b^2)$ resulta:

$\frac{6a^3b^2}{6a^3b^2} - \frac{12a^5b^3}{6a^3b^2} + \frac{24a^8b^5}{6a^3b^2} - \frac{18a^7b^6}{6a^3b^2} = 1 - 2a^2b + 4a^5b^3 - 3a^4b^4$. En disposición clásica se tiene:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
6a^3b^2 & -12a^5b^3 & +24a^8b^5 & -18a^7b^6 & 6a^3b^2 \\
\cline{5-5}
-6a^3b^2 & & & & 1 - 2a^2b + 4a^5b^3 - 3a^4b^4 \\
\cline{1-1}
0 & -12a^5b^3 & & & \\
 & +12a^5b^3 & & & \\
\cline{2-2}
 & 0 & +24a^8b^5 & & \\
 & & -24a^8b^5 & & \\
\cline{3-3}
 & & 0 & -18a^7b^6 & \\
 & & & +18a^7b^6 & \\
\cline{4-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

División de un Polinomio por otro Polinomio. Para dividir dos polinomios se recomienda seguir los pasos siguientes: (a) Dividendo y divisor se ordenan en forma decreciente, (b) se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor, y se obtiene el primer término del cociente, (c) se multiplica el divisor por el primer término del cociente y el producto se resta del dividendo, obteniéndose un residuo parcial, (d) se divide el primer término del residuo por el primer término del divisor, para obtener el segundo término del cociente, (e) se multiplica este segundo término del cociente por el divisor y se resta del primer residuo parcial, (f) el proceso se repite hasta que el resto sea cero o de grado inferior al divisor. Ejemplo,

$$\begin{array}{l|l} 5x^5+0x^4+3x^3+0x^2-x-3 & x^2+x-2 \\ \hline -5x^5-5x^4+10x^3 & 5x^3-5x^2+18x-28 \\ \quad 0-5x^4+13x^3+0x^2 & \\ \quad +5x^4+5x^3-10x^2 & \\ \qquad 0+18x^3-10x^2-x & \\ \qquad -18x^3-18x^2+36x & \\ \qquad\quad 0-28x^2+35x-3 & \\ \qquad\quad +28x^2+28x-56 & \\ \qquad\qquad 0+63x-59 & \end{array}$$

Si el divisor es un binomio de la forma $ax \pm b$ el proceso de dividir se simplifica con la llamada «división sintética». En particular, al dividir $(5x^3-12x^2+7x-7) \div (x-2)$ se tiene:

$$\begin{array}{c|cccc} & 5 & -12 & 7 & -6 \\ 2 & & 10 & -4 & 6 \\ \hline & 5 & -2 & 3 & 0 \end{array}$$

Luego $\frac{5x^3-12x^2+7x-6}{x-2} = 5x^2-2x+3$

Factorización. Casos comunes

Con base en la propiedad distributiva del producto respecto a la adición, se efectúa el proceso de factorización, el cual consiste en descomponer una expresión en un producto de dos o más factores. Los casos más comunes son:

a) **Factor común**. Se llama así al «$\mathrm{M.C.D}$» entre los términos de una suma algebraica, el cual se extrae en un proceso inverso a la propiedad distributiva.

Ejemplos. (1) $24a^2xy^2-36x^3y^4=(12xy^2)\,2a-(12xy^2)3x^2y^2=12xy^2(2a-3x^2y^2)$

(2) $16x^3y^2-8x^2y+24x^4y^2-40x^2y^2=(8x^2y)2xy-8x^2y+(8x^2y)3x^2y-(8x^2y)5y^2$

$=8x^2y(2xy-1+3x^2y-5y^2$

b) **Diferencia de cuadrados**. Como al multiplicar $(x+a)(x-a)$ resulta x^2-a^2, entonces la diferencia de cuadrados x^2-a^2 se factoriza como la suma de dos términos por su diferencia.

Ejemplos. (1) $4x^2-9y^2=(2x+3y)(2x-3y)$

(2) $5x^4-(y-2z)^2=\left(\sqrt{5}x^2\right)^2-(y-2z)^2=\left[\sqrt{5}x^2+(y-2z)\right]\left[\sqrt{5}x^2-(y-2z)\right]$

c) **Trinomio de segundo grado**.

c.1) **Trinomio de segundo grado** «cuadrado perfecto». Si en el trinomio $ax^2 + bx + c$ los extremos tienen raíz cuadrada exacta y el doble producto de estos es igual al término central, entonces el trinomio $ax^2 + bx + c$ es un cuadrado perfecto.

Ejemplos. (1) $16a^2 + 40ab + 25b^2 = (4a + 5b)^2$, pues $\sqrt{16a^2} = 4a$; $\sqrt{25b^2} = 5b$ y $2(4a)(5b) = 40ab$

(2) $81a^4 - 72a^2b + 16b^2 = (9a^2 - 4b)^2$, ya que $\sqrt{81a^4} = 9a^2$; $\sqrt{16b^2} = 4b$ y $2(9a^2)(4b) = 72a^2b$

c.2) **Trinomio de segundo grado** «no cuadrado perfecto». En el trinomio, si $a = 1$ se ensaya su factorización buscando dos números cuyo producto sea el extremo «c» y cuya suma o resta sea el término central «b».

Ejemplos. (1) $x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4)$ debido a que $(-2).(-4) = 8$ y $(-2) + (-4) = -6$

(2) $x^2 + 2x - 15 = (x + 5)(x - 3)$ puesto que $(+5).(-3) = -15$ y $(+5) + (-3) = 2$

Si en el trinomio $ax^2 + bx + c$, $a \neq 1$ se procede como se indica.

Ejemplos: (1) $2x^2 + 8x + 6 = \frac{2(2x^2 + 8x + 6)}{2} = \frac{4x^2 + 8(2x) + 12}{2} = \frac{(2x)^2 + 8(2x) + 12}{2}$

$$= \frac{(2x + 6)(2x + 2)}{2}$$

$$= \frac{(2x + 6).2.(x + 1)}{2}$$

En consecuencia $2x^2 + 8x + 6 = (2x + 6)(x + 1)$

(2) $6x^2 + 7x - 20 = \frac{6(6x^2 + 7x - 20)}{6} = \frac{36x^2 + 7(6x) - 120}{6} = \frac{(6x)^2 + 7(6x) - 120}{6}$

$$= \frac{(6x + 15)(6x - 8)}{6}$$

$$= \frac{3(2x + 5).2.(3x - 4)}{6}$$

En consecuencia $6x^2 + 7x - 20 = (2x + 5)(3x - 4)$

En cualquier caso, el trinomio $ax^2 + bx + c$ se factoriza a través del «método de completar el cuadrado perfecto», el cual se desarrolla como se indica:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{d}\right)$$

$$= \left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + \left(\frac{c}{d} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right]$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right]$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2\right], \text{ con } (b^2 - 4ac) \geq 0$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\right]\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\right]$$

$$= a\left(x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$$

Ejemplo. $5x^2+13x-6=5\left(x^2+\frac{13}{5}x-\frac{6}{5}\right)$

$$=5\left[\left(x^2+\frac{13}{5}x+\frac{169}{100}\right)-\frac{6}{5}-\frac{169}{100}\right]$$

$$=5\left[\left(x+\frac{13}{10}\right)^2-\left(\frac{17}{10}\right)^2\right]$$

$$=5\left(x+\frac{13}{10}+\frac{17}{10}\right)\left(x+\frac{13}{10}-\frac{17}{10}\right)$$

$$=5(x+3)\left(x-\frac{2}{5}\right)$$

$$=(x+3)(5x-2$$

d) **Diferencia de cubos**. La diferencia x^3-y^3 se factoriza como $(x-y)(x^2+xy+y^2)$

Ejemplo. $x^3y^6-216y^9=(xy^2)^3-(6y^3)^3=(xy^2-6y^3)(x^2y^4+6xy^5+36y^6)$

e) **Suma de cubos**. La suma x^3+y^3 se factoriza como $(x+y)(x^2-xy+y^2)$

Ejemplo. $(x+1)^3+(x-2)^3=[(x+1)+(x-2)][(x+1)^2-(x+1)(x-2)+(x-2)^2]$

$$=(2x-1)(x^2+2x+1-x^2+x+2+x^2-4x+4)$$

$$=(2x-1)(x^2-x+7)$$

Simplificación de fracciones algebraicas. Para simplificar fracciones algebraicas se factoriza numerador y denominador de la fracción y se simplifican los factores comunes

Ejemplos. (1) $\frac{6x^2-7x-3}{4x^2-8x+3}=\frac{(2x-3)(3x+1)}{(2x-3)(2x-1)}=\frac{3x+1}{2x-1}$, siempre que $x\neq\frac{3}{2}$

(2) $\frac{(x^2-x-2)(x^2-9)}{(x^2-2x-3)(x^2+x-6)}=\frac{(x-2)(x+1)(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+1)(x+3)(x-2)}=1$, siempre que $x\neq\pm 3$, $x\neq -1$ y $x\neq 2$

Operaciones con fracciones algebraicas

Adición. La entre dos o más fracciones algebraicas se efectúa como si se tratara de una adición entre racionales. Ejemplo,

Ejemplo. $\frac{2x-1}{2x^2-x-6}+\frac{x+3}{6x^2+x-12}-\frac{2x-3}{3x^2-10x+8}=\frac{2x-1}{(x-2)(2x+3)}+\frac{x+3}{(2x+3)(3x-4)}-\frac{2x-3}{(x-2)(3x-4)}$

$$=\frac{(2x-1)(3x-4)+(x+3)(x-2)-(2x-3)(2x+3)}{(x-2)(2x+3)(3x-4)}$$

$$=\frac{6x^2-11x+4+x^2+x-6-4x^2+9}{(x-2)(2x+3)(3x-4)}$$

En consecuencia $\frac{2x-1}{2x^2-x-6}+\frac{x+3}{6x^2+x-12}-\frac{2x-3}{3x^2-10x+8}=\frac{3x^2-10x+7}{(x-2)(2x+3)(3x-4)}$

Multiplicación. Al igual que el producto de fracciones, para multiplicar fracciones algebraicas se multiplican sus numeradores para hallar el numerador del producto, y se multiplican sus denominadores para hallar el denominador del producto.

Ejemplo. $\left(\frac{3x^2-x-2}{x^2-1}\right)\left(\frac{x^3+x^2-x-1}{2x^2-3x-5}\right)=\frac{(x-1)(3x+2)(x+1)^2(x-1)}{(x-1)(x+1)^2(2x-5)}=\frac{(3x+2)(x-1)}{(2x-5)}$, para $x\neq\pm 1$.

Operaciones combinadas. Se llama así, a las operaciones con fracciones algebraicas donde están indicadas una o más operaciones fundamentales.

Ejemplos. (1) $\left(a + x - \frac{ax + x^2}{a + 2x}\right)\left(1 + \frac{x}{a + x}\right) = \left(\frac{a^2 + 2ax + x^2}{a + 2x}\right)\left(\frac{a + 2x}{a + x}\right) = \frac{(x + a)^2}{x + a} = x + a$

(2) $\frac{\left(\frac{a + x}{a - x}\right) - \left(\frac{b + x}{b - x}\right)}{\left(\frac{2}{a - x}\right) - \left(\frac{2}{b - x}\right)} = \frac{\left[\frac{(a + x)(b - x) - (a - x)(b + x)}{(a - x)(b - x)}\right]}{\left[\frac{2(b - x) - 2(a - x)}{(a - x)(b - x)}\right]}$

$= \frac{[ab + (b - a)x - x^2] - [ab + (a - b)x - x^2]}{2b - 2a}$

$= \frac{x(2b - 2a)}{2b - 2a}$

En consecuencia $\frac{\left(\frac{a + x}{a - x}\right) - \left(\frac{b + x}{b - x}\right)}{\left(\frac{2}{a - x}\right) - \left(\frac{2}{b - x}\right)} = x$

Actividad Nº 4

I. Efectúe los siguientes productos «notables»

1) $(x-5)^2$
2) $(3-x)^2$
3) $(3x+7)^2$
4) $(-x-6)^2$
5) $(-4x+6)^2$
6) $(-7-3x)^2$
7) $\left(\frac{2}{5}a^3-\frac{3}{4}b^2\right)^2$
8) $\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y\right)^2$
9) $\left(\frac{3}{2}x+\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{3}{2}x-\frac{2}{5}\right)$
10) $\left(\frac{3}{4}a+\frac{2}{3}b\right)\left(\frac{3}{4}a+\frac{2}{3}b\right)$
11) $\left(\frac{x}{a}+y+\frac{z}{c}\right)^2$
12) $(x+2)^3$
13) $\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}y+2z+\frac{w}{5}\right)^2$
14) $(-a-2)^3$
15) $(2x-5)^3$
16) $(4x^3y^2-7x^2y^3)^3$
17) $\left(-\frac{2}{5}a^3+\frac{3}{4}b^2\right)^3$
18) $\left(\frac{3}{4}a+\frac{2}{3}b\right)\left(\frac{3}{4}a+\frac{2}{3}b\right)^2$
19) $\left(\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt{ab}\right)^3$
20) $[(x+1)-(3x+5)]^3$
21) $\left(\frac{3}{4}x-5\right)\left(\frac{3}{4}x+2\right)$
22) $\left(\frac{2}{3}-5x\right)\left(5x+\frac{3}{4}\right)$
23) $\left(\frac{2}{3}x-5\right)\left(5-\frac{2}{3}x\right)$
24) $\left(\frac{3}{5}p-4\right)\left(\frac{3}{5}p+4\right)$
25) $\left(\frac{2}{5}x-\frac{3}{7}y\right)\left(-\frac{2}{5}x-\frac{3}{7}y\right)$
26) $\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{6}z\right)\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{6}z\right)$
27) $\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}y\right)\left(\frac{4}{9}x^2-\frac{1}{3}xy+\frac{1}{4}y^2\right)$
28) $\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}b\right)\left(\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{6}ab+\frac{1}{9}b^2\right)$
29) $\left(\frac{2}{7}x-\frac{3}{4}+\frac{2}{3}y\right)\left(\frac{2}{7}x-\frac{2}{3}y-\frac{3}{4}\right)$
30) $\left(\frac{8}{7}x^3+\frac{4}{3}y^5\right)\left(\frac{8}{7}x^3-\frac{4}{3}y^5\right)$

II. Factorice cada una de las siguientes expresiones algebraicas

1) x^2+xy
2) $5x^3-3x^2$
3) $4a^2b-12ab^3$
4) $24a^3b^2c-36ab^2c^3$
5) $p(p+1)-p-1$
6) $a(x+3)+1+x+2$
7) $55m^2n^3x+110m^2n^3x^2-220m^2x^3$
8) $16a^3b^2-8a^2b-24a^4b^2-40a^2b^2$
9) $(abc)^2-a^2c^2x^2+(ac)^2y^2$
10) $a(x-1)+1-x+b(x-1)$
11) $(x-a)(y+2)+a(y+2)$
12) $p(x+a)-x-a$
13) $a(z+y+2x)-2x-y-z$
14) $(x-a)(x-b)+(x-a)(x+b)$
15) $3a(a-1)+2b(a-1)+c(a-1)$
16) $ax+bx+ay+by$
17) $2p^2-4pq+4p-8q$
18) $a+c^2-2pa-2pc^2$
19) $3x^3+2axy+2ay^2-3xy^2-2ax^2-3x^2y$
20) $a^2b^3-n^4+a^2b^3x^2-n^4x^2-3a^2b^3x+3n^4x$
21) $p^2+2pq+q^2$
22) $a^2-2ab+b^2$
23) $4p^2+4pq+q^2$
24) $9x^2-6xy+y^2$
25) $\frac{9}{4}a^2+\frac{6}{5}ab+\frac{4}{25}b^2$
26) $\frac{4}{9}p^4q^2-\frac{4}{15}p^2q^3+\frac{1}{25}q^4$
27) x^2+6x+8
28) x^2-6x+8
29) p^2+2p-8
30) p^2-2p-8

31) $6x^3 - 6x^2 - 36x$
32) $a^4 + 7a^2 + 12$
33) $p^4 + p^2 - 2$
34) $(p+q)^2 + 3(p+q) - 18$
35) $(ab)^2 - 2ab - 63$
36) $16 - 10x^2 + x^4$
37) $10 - 3a - a^2$
38) $x^2 - 7xy + 12y^2$
39) $p^2 - 10p + 9$
40) $8 - 14q + 5q^2$
41) $6x^2 + x - 12$
42) $3x^2 - 11x + 6$
43) $2u^2 + 3u + 1$
44) $2u^2 + 3u - 2$
45) $8x^2 - 14x - 15$
46) $3 + 11b + 10b^2$
47) $12z^2 - z - 6$
48) $4m^2 + m - 33$
49) $9x^2 + 10x + 1$
50) $12p^2 - 7p - 12$
51) $2x^2 - 3$
52) $9x^4 - 4a^2$
53) $16x^4 - 3a^2$
54) $-256x^4 + (a - 2b)^2$
55) $5a^2 - 7b^4$
56) $(4a^2 - 4a + 1)^2 - (2a+1)^4$
57) $-16 + x^8$
58) $(a-2)^2 - b^2 + 6b - 9$
59) $15p^2 - 17q^2$
60) $1 - a^{16}$
61) $a^3b^6 - 216y^9$
62) $27 - x^3$
63) $125x^{12} + 64$
64) $1 - 729x^6$
65) $64 - a^{12}$
66) $(a+b)^3 + 1$
67) $8 - (a-b)^3$
68) $(x+2)^3 - (x-3)^3$
69) $64(x+a)^3 - 125$
70) $-(p+q)^3 + (p-q)^3$

III. Simplifique cada una de las siguientes fracciones algebraicas

1) $\frac{a^2 + ab}{a + b}$
2) $\frac{6x^2 + 5x - 6}{2x^2 - x - 6}$
3) $\frac{x^2 - p^2}{x^2 - 2px + p^2}$
4) $\frac{ax - ay + bx - by}{a + b}$
5) $\frac{a^2 - 4a + 4}{2a^2 - 4a}$
6) $\frac{2x^2 - 5x - 3}{9 - 6x + x^2}$
7) $\frac{6pq}{2p^2x + 2p^3}$
8) $\frac{(x-5)^2(x^2 + x - 12)}{(5-x)(x^2 - x - 6)}$
9) $\frac{(a+b)^2 - (c-d)^2}{(a+c)^2 - (b-d)^2}$
10) $\frac{(8 - x^3)(6 - x - x^2)}{(2-x)^2(x^2 + 2x + 4)}$

IV. Resolver y simplificar

1) $\left(\frac{x^{-1} + y^{-1}}{x^{-1} - y^{-1}}\right)^{-1}$
2) $\frac{x+1}{x+2} + \frac{2x-3}{x+1}$
3) $\left(x + 3 - \frac{5}{x-1}\right)\left(x - 2 + \frac{5}{x+4}\right)$
4) $\frac{2x+1}{(x+1)(x+2)} + \frac{x-1}{(x^2-1)\,(x+2)}$
5) $\frac{p}{x+a} + \frac{p}{x-a} + \frac{p}{x^2-a^2}$
6) $\left(\frac{p^2 - 6p + 5}{p^2 - 15p + 56}\right) \div \left(\frac{p^2 + 2p - 35}{p^2 - 5p - 24}\right)$
7) $(x-2)^{-1}\frac{(3x+2)}{x+5} - \frac{5x+1}{x^2 + 4x - 5} + \frac{1}{(x-1)}\left(\frac{4x-1}{x-2}\right) + \frac{3}{2 + x - x^2} - \left(\frac{x}{x-2}\right) \div (x-3)$
8) $\left[\left(\frac{x^2 - 3x}{9 - x^2}\right)\left(\frac{27 - x^3}{(x+3)^2 - 3x}\right) \div \left(\frac{x^4 - 9x^2}{(x^2 + 3x)^2}\right)\right]\left[\left(\frac{x^2 - 6x + 9}{4x^2 - 1}\right) \div \left(\frac{x^2 + 5x - 24}{2x^2 + 17x + 8}\right)\right]$

9) $\left[\dfrac{\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)-\left(\dfrac{x+a}{x}\right)}{\left(\dfrac{x}{x-a}\right)-\left(\dfrac{x+a}{x-b}\right)}\right]$

10) $\dfrac{\left[\dfrac{x+1-\left(\dfrac{6x+12}{x+2}\right)}{x-5}\right]}{\left[\dfrac{x-4+\left(\dfrac{11x-22}{x-2}\right)}{x+7}\right]}$

11) $\dfrac{x-2}{x-\left[\dfrac{1}{1-\left(\dfrac{2}{x}\right)}\right]}$

12) $\dfrac{1}{2-\dfrac{x+1}{x-\dfrac{1}{x}}}$

13) $\dfrac{1}{x-\left[\dfrac{x}{x-\left(\dfrac{x^2}{x+1}\right)}\right]}+\dfrac{x+1}{x+2-\left[\dfrac{x+2}{x-\left(\dfrac{x^2-2}{x+1}\right)}\right]}-\left[\dfrac{1-\left(\dfrac{7}{x}+\dfrac{12}{x^2}\right)}{1-\left(\dfrac{3}{x}\right)}\right]$

CAPÍTULO 3: ECUACIONES E INECUACIONES EN $\mathbb{R}$

En el contexto matemático, el estudio de $\mathbb{R}$ junto al de las expresiones algebraicas se aplica en todo el quehacer matemático, aquí se restringirá a la búsqueda de solución a las ecuaciones e inecuaciones que trascienden la linealidad. Sin embargo, en tales conceptos su utilidad es incuantificable, debido a que en estos objetos matemáticos desemboca una infinidad de problemas que debe resolver el estudiante en su tránsito por la universidad y más adelante en su ámbito profesional. Por esta razón, es preciso evocar los modos usuales «además de los lineales, estudiado arriba» en que estos objetos matemáticos suelen manifestarse, donde resaltan los siguientes:

Ecuación cuadrática.

Una ecuación cuadrática es una igualdad con un miembro igual a trinomio cuadrado y el restante igual a cero, es decir $ax^2+bx+c=0$. El conjunto solución o los valores de «x» que satisfacen la identidad se pueden determinar por radicales.

En efecto. $ax^2+bx+c=0$ equivale a $ax^2+bx=-c$ «transponiendo términos»

Pero $ax^2+bx=-c$ implica $4a^2+4abx=-4ac$ «multiplicando por $4a$»

y $4a^2+4abx=-4ac$ implica $4a^2+4abx+b^2=b^2-4ac$ «sumando b^2»

Así $(2ax+b)^2=b^2-4ac$ o bien $2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}$, luego la expresión $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ genera el conjunto solución o las «x» que satisfacen la identidad

Ejemplo 1. En la búsqueda del conjunto solución de la ecuación $6x^2+11x+3=0$ se tiene:
(i) Identificar $a=6$, $b=11$ y $c=3$; (ii) estudiar el signo de $b^2-4ac=11^2-4(6)(3)=49>0$ para ver si la ecuación tiene o no solución en $\mathbb{R}$. En este caso hay dos raíces distintas, y (iii) aplicar la resolvente para hallar las raíces, esto es $x=\frac{-11\pm\sqrt{11^2-4(6)(3)}}{2(6)}$ o bien $x=\frac{-11\pm\sqrt{49}}{12}$ es decir $x=\frac{-11\pm7}{12}$, luego $x_1=\frac{-11-7}{12}=-\frac{18}{12}$ o su equivalente $x_1=-\frac{3}{2}$ y $x_2=\frac{-11+7}{12}=-\frac{4}{12}$ o bien $x_2=-\frac{1}{3}$. También es usual escribir $S=\left\{-\frac{3}{2},-\frac{1}{3}\right\}$.

Ejemplo 2. Encontrar el conjunto solución a la ecuación $4x^2+12x+9=0$ implica:
(i) Distinguir $a=4$, $b=12$, $c=9$; (ii) estudiar $b^2-4ac=12^2-4(4)(9)=144-144=0$. En este caso, la ecuación solo tiene una raíz real doble; y (iii) aplicar la resolvente, es decir $x=\frac{-12\pm\sqrt{12^2-4(4)(9)}}{2(4)}$ luego $x=\frac{-12+0}{8}$ o bien $x=-\frac{3}{2}$; o también $S=\left\{-\frac{3}{2}\right\}$.

Ejemplo 3. La ecuación $2x^2-3x+5=0$ carece de solución real ya que $b^2-4ac=(-3)^2-4(2)(5)=-31$, es decir $b^2-4ac<0$

Ejemplo 4. Si un número excede a otro en tres unidades y la suma de sus cuadrados es 65, ¿cuáles son esos números?

Procedimiento	Descripción algebraica
Dado un número diferente de 0, hacer	Sea «x» el número y $x \neq 0$
1) Identificar el Nº dado como el mayor	1) sea x el número mayor
2) Disminuir en 3 el número dado en (1)	2) $x-3$ el número menor
3) Elevar al cuadrado los números de (1) y (2)	3) x^2 y $(x-3)^2$
4) Sumar los números dados en (3)	4) $x^2+(x-3)^2$
5) Igualar a 65 el resultado de (4)	5) $x^2+(x-3)^2=65$

Como (5) equivale a $x^2+x^2-6x+9-65=0$ o bien $x^2-3x-28=0$, entonces $x=\frac{3\pm\sqrt{9+112}}{2}$ esto es $x=\frac{3\,\pm\,11}{2}$ luego $x_1=\frac{14}{2}=7$ y $x_2=-\frac{8}{2}=-4$ son los números requeridos

COMENTARIOS

1. Siendo $x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y $x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$, su suma $x_1+x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{2b}{2a}$ luego $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ y su producto $x_1.x_2=\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=\frac{(-b)^2-\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{4a^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}$ es decir $x_1.x_2=\frac{4ac}{4a^2}$ o bien $x_1.x_2=\frac{c}{a}$.

Ejemplo 1. En $4x^2-8x-12=0$ la suma de sus raíces $x_1+x_2=-\frac{(-8)}{4}=2$, mientras que su producto $x_1.x_2=\frac{-12}{4}=-3$.

Ejemplo 2. Si 3 y 4 son las raíces de una ecuación cuadrática, ¿cuál es su expresión algebraica?

Como $ax^2+bx+c=0$ es la ecuación cuadrática o también $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$, mientras que $-\frac{b}{a}=3+4$ entonces $\frac{b}{a}=-7$ y $\frac{c}{a}=3.4$ es decir $\frac{c}{a}=12$, luego al sustituir en la ecuación general se tiene $x^2-7x+12=0$ es la ecuación pedida.

2. Las ecuaciones de la forma «$ax^4+bx^2+c=0$» llamadas ecuaciones bicuadradas, pueden reducirse a una ecuación cuadrática solo con cambiar «x^2» por «y», es decir $x^2=y$ así $a(x^2)^2+bx^2+c=0$ implica $ay^2+by+c=0$.

Ejemplo. Hallar el conjunto solución de la ecuación bicuadrada $x^4-40x^2+144=0$ implica:

(i) Cambiar de variable $x^2=y$ y rescribir la ecuación, es decir $y^2-40y+144=0$;

(ii) Resolver la ecuación, $y=\frac{40\pm\sqrt{1600-576}}{2}$ o bien $y=\frac{40\pm32}{2}$ así $y_1=4$ y $y_2=36$;

(iii) Devolver el cambio de variable, es decir $x^2=y$ implica $x^2=4$ y $x^2=36$ luego $x=\pm2$ y $x=\pm6$ entonces $\{-6,\ -2,\ 2,\ 6\}$ es el conjunto solución de la ecuación.

3. Las ecuaciones de tercer grado también pueden resolverse por radicales, pero la complejidad de la resolvente para este caso, junto a la imposibilidad de utilizar radicales para resolver ecuaciones de grado mayor a tres, es un asunto fuera del alcance de este curso. Sin embargo, se revisaran algunas estrategias algebraicas para hallar la solución a este tipo de ecuaciones.

Raíces Enteras y Fraccionarias de una Ecuación Polinómica

La ecuación $\boldsymbol{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0 = 0}$, con $\boldsymbol{a_n}$, $\boldsymbol{a_{n-1}}$, $\boldsymbol{a_{n-2}},\ldots\boldsymbol{a_0}$ números enteros y $\mathbf{P}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0}$ el polinomio asociado a la ecuación, posee raíces enteras, si verifica las condiciones siguientes

a) Toda raíz entera de la ecuación con coeficientes enteros es un divisor de a_0.

b) Todo divisor entero de a_0 que es raíz probable de la ecuación debe verificar:

(i) $\mathrm{P}(1)$ es múltiplo de $(d_0 - 1)$ donde «d_0» es divisor de a_0

(ii) $\mathrm{P}(-1)$ es múltiplo de $(d_0 + 1)$.

Ejemplo 1. Encontrar el conjunto solución de la ecuación cubica $2x^3 - 9x^2 - 33x - 14 = 0$ implica:

(i) Asociar la ecuación al polinomio, es decir $\mathrm{P}(x) = 2x^3 - 9x^2 - 33x - 14$; hallar los divisores de $a_0 = 14$ que son $\{\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14\}$, determinar $\mathrm{P}(1) = -54$ y $\mathrm{P}(-1) = 8$. (ii) Para $d_0 = -2$ se tiene que: -54 es múltiplo de $(-2-1) = -3$ y 8 es múltiplo de $(-2+1) = -1$, luego $d_0 = -2$ es una raíz probable a verificar por división sintética.

(iii) Para $d_0 = 2$ se tiene: -54 es múltiplo de $(2-1) = 1$, pero 8 no es múltiplo de $(2+1) = 3$, luego $d_0 = 2$ no es raíz de la ecuación.

(iv) Para $d_0 = -7$ se tiene: -54 no es múltiplo de $(-7-1) = -8$, luego $d_0 = -7$ no es raíz de la ecuación.

(v) Para $d_0 = 7$ se tiene: -54 múltiplo de $(7-1) = 6$ y 8 múltiplo de $(7+1) = 8$, luego $d_0 = 7$ es una raíz probable a verificar por división sintética. Esto es:

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & -9 & -33 & -14 \\
-2 & & -4 & 26 & 14 \\
\hline
 & 2 & -13 & -7 & 0 \\
7 & & 14 & 7 & \\
\hline
 & 2 & 1 & 0 &
\end{array}
$$

La división genera las raíces $x_1 = -2$, $x_2 = 7$ y el factor $2x + 1 = 0$ o bien $x_3 = -\frac{1}{2}$. Así $\left\{-2, -\frac{1}{2}, 7\right\}$ es el conjunto solución a la ecuación.

Si la ecuación $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0 = 0$ (1) no posee raíces enteras, se procede a la búsqueda de las raíces fraccionarias, para ello se hace $x = \frac{y}{a_n}$, con este cambio (1) que transforma en:

$\frac{a_n\, y^n}{(a_n)^n} + \frac{a_{n-1}\, y^{n-1}}{(a_n)^{n-1}} + \frac{a_{n-2}\, y^{n-2}}{(a_n)^{n-2}} + \cdots + \frac{a_0}{(a_n)^0} = 0$ lo que implica $\frac{y^n}{(a_n)^{n-1}} + \frac{a_{n-1}\, y^{n-1}}{(a_n)^{n-1}} + \frac{a_{n-2}\, y^{n-2}}{(a_n)^{n-2}} + \cdots + a_0 = 0$ es decir $\frac{y^n + a_{n-1}\, y^{n-1} + a.a_{n-2}\, y^{n-2} + \cdots + (a_n)^{n-1} a_0}{(a_n)^{n-1}} = 0$ o bien $y^n + b_{n-1}y^{n-1} + b_{n-2}y^{n-2} + \cdots + b_0 = 0$. De esta ecuación, se calculan sus raíces $y_1,\ y_2,\ y_3, \ldots\ y_n$ de donde se deriva $x_1 = \frac{y_1}{a_n},\ x_2 = \frac{y_2}{a_n},\ x_3 = \frac{y_3}{a_n}\ \ldots\ x_n = \frac{y_n}{a_n}$ que son las raíces fraccionarias de la ecuación.

Ejemplo 2. Hallar el conjunto solución de la ecuación $6x^4 + 11x^3 + 10x^2 + 11x + 4 = 0$ implica;
Asociar la ecuación al polinomio, es decir $\mathrm{P}(x) = 6x^4 + 11x^3 + 10x^2 + 11x + 4$, hallar los divisores de 4 que son $\{\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 4\}$, calcular $P(1) = 42$ y $P(-1) = -2$ entonces:
(i) 42 es múltiplo $(-2-1) = -3$ mientras que -2 es múltiplo de $(-2+1) = -1$. Sin embargo, esto no implica que sea raíz, pues $P(-2) = 6(-2)^4 + 11(-2)^3 + 10(-2)^2 + 11(-2) + 4 = 30 \neq 0$, luego -2 no es raíz;
(ii) 42 es múltiplo de $(2-1) = 1$, pero -2 no es múltiplo $(2+1) = 3$, luego -2 no es raíz de la ecuación;
(iii) 42 no es múltiplo $(-4-1) = -5$, luego -4 no es raíz de la ecuación;
(iv) 42 múltiplo de $(4-1) = 3$, pero -2 no es múltiplo de $(4+1) = 5$, luego -2 no es raíz de la ecuación.
De (i), (ii), (iii) y (iv) se sigue que la ecuación no tiene raíces enteras.

Para hallar las raíces fraccionarias se hace $x = \frac{y}{6}$ y se escribe la ecuación equivalente a la dada en la nueva variable, esto es: $\frac{6y^4}{6^4} + \frac{11y^3}{6^3} + \frac{10y^2}{6^2} + \frac{11y}{6} + 4 = 0$ o su equivalente $y^4 + 11y^3 + 60y^2 + 396y + 864 = 0$ y se reitera el proceso seguido arriba, es decir:
Polinomio asociado a la ecuación $P(y) = y^4 + 11y^3 + 60y^2 + 396y + 864$; divisores de 864 que son $\{\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \pm 6, \pm 8,\ \pm 12, \pm 16, \pm 18 \ldots\}$; calcular $\mathrm{P}(1) = 1332$ y $P(-1) = 518$. «± 2 y ± 4 se descartaron en la ecuación equivalente», luego
(i) 1332 es múltiplo de $(-3-1) = -4$ y 518 es múltiplo de $(-3+1) = -2$, luego $y = -3$ es una raíz probable y debe verificarse
(ii) 1332 es múltiplo de $(3-1) = 2$, pero 518 no es múltiplo de $(3+1) = 4$, luego 3 no es raíz de la ecuación
(iii) 1332 no es múltiplo de $(-6-1) = -7$, luego -6 no es raíz de la ecuación
(iv) 1332 es múltiplo de (-8-1)=-9 y 518 es múltiplo de (-8+1)=-7, luego y=-8 es una raíz probable y debe verificarse, esto es:

	1	11	60	396	864
-3		-3	-24	-108	-864
	1	8	36	288	0
-8		-8	0	-288	
	1	0	36	0	

Como $y^2 + 36$ es irreducible entonces $y_1 = -3$ y $y_2 = -8$ o sus equivalentes $x_1 = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$ y $x_2 = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$ son las raíces fraccionarias de la ecuación o también $\left\{-\frac{1}{2}, -\frac{4}{3}\right\}$ su conjunto solución.

Inecuaciones cuadráticas.

Una inecuación cuadrática es una desigualdad con un trinomio cuadrado en uno de sus miembros y cero en el miembro restante, decir $ax^2+bx+c<0$; $ax^2+bx+c\leq 0$; $ax^2+bx+c>0$; $ax^2+bx+c\geq 0$ o reducibles a ellas, cuando tanto «b» como «c» son distintos de cero, pero sí «b» o «c» son iguales a cero, este objeto matemático se simplifica. El conjunto solución puede encontrarse siguiendo una de las siguientes técnicas: (i) factorizando el trinomio y luego resolviendo las inecuaciones por intersección y unión de intervalos; (ii) factorizando el trinomio por «completación de cuadrados» seguido de la aplicación de las siguientes propiedades del módulo o valor absoluto:

1) $\sqrt{x^2}=|x|$; 2) $|x|\leq a \leftrightarrow \begin{cases} x\leq a \\ \wedge \\ x\geq -a \end{cases}$; 3) $|x|\geq a \leftrightarrow \begin{cases} x\geq a \\ \vee \\ x\leq -a \end{cases}$; y (iii) se factoriza el trinomio seguido del estudio de los signos a la izquierda y derecha del número que anula a los factores, la solución es el intervalo o unión de intervalos con el mismo signo de la desigualdad. Todas estas estrategias conducen a una única solución, pero las tres deben tenerse presentes debido al contexto y las particularidades del problema que las deriva.

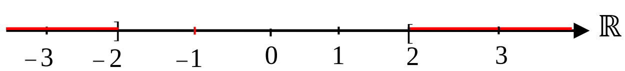
Ejemplo 1. En la búsqueda del conjunto solución de la inecuación $x^2-4\geq 0$ se tiene:

1. Aplicando la técnica (i)

Como $x^2-4\geq 0$ tiene como factores $(x-2)(x+2)\geq 0$ (1)

Debido a que $a.b>0$ implica el sistema $\begin{cases} a>0 \ \wedge \ b>0 \\ \vee \\ a<0 \ \wedge \ b<0 \end{cases}$ al aplicarlo a la inecuación (1) resulta

$\begin{cases} x-2\geq 0 \ \wedge \ x+2\geq 0 \\ \vee \\ x-2\leq 0 \ \wedge \ x+2\leq 0 \end{cases}$ es decir $\begin{cases} x\geq 2 \ \wedge x\geq -2 \\ \vee \\ x\leq 2 \ \wedge x\leq -2 \end{cases}$ o bien $\begin{cases} x\geq 2 \\ \vee \\ x\leq -2 \end{cases}$ luego $x\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$ o también $S=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$. Su representación gráfica se muestra en la figura.



2. Aplicando la técnica (ii)

Como $x^2-4\geq 0$ equivale a $x^2\geq 2^2$, entonces al aplicar la propiedad (2) se tiene $\sqrt{x^2}\geq\sqrt{2^2}$ es decir $|x|\geq|2|$, pero $|x|\geq 2$ implica $\begin{cases} x\geq 2 \\ \vee \\ x\leq -2 \end{cases}$ luego $x\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

3. Aplicando la técnica (iii)

Debido a que la desigualdad $x^2-4\geq 0$ equivale a $(x-2)(x+2)\geq 0$ y los factores de esta inecuación se anulan cuando $x=2$ y $x=-2$, se estudian los signos como se ilustra en la tabla

$-\infty$ a -2	-2 a 2	2 a $+\infty$	$\mathbb{R}$
$-$	$+$	$+$	$x+2$
$-$	$-$	$+$	$x-2$
$+$	$-$	$+$	$x^2-4 \geq 0$

Luego $x \in (-\infty,-2] \cup [2,+\infty)$ o bien $S = (-\infty,-2] \cup [2,+\infty)$

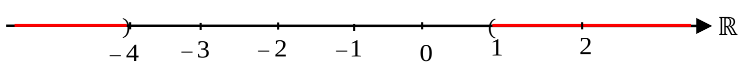
Ejemplo 2. Al hallar el conjunto solución de la inecuación $x^2 - 5x + 6 < 0$ se tiene en cuenta que $x^2 - 5x + 6 < 0$ equivale a $(x-3)(x-2) < 0$, desigualdad que se verifica cuando sus factores tienen signos diferentes, entonces el estudio de éstas desigualdades genera el sistema:

$\begin{cases} x-3<0 \ \wedge \ x-2>0 \\ \vee \\ x-3>0 \ \wedge \ x-2<0 \end{cases}$ es decir $\begin{cases} x<3 \ \wedge x>2 \\ \vee \\ x>3 \ \wedge x<2 \end{cases}$ o también $\begin{cases} 2<x<3 \\ \vee \\ x \in \emptyset \end{cases}$ luego $\in (2,3)$ o bien $S = (2,3)$

Ejemplo 3. Al hallar el conjunto solución de la desigualdad $x^2 + 3x - 4 > 0$ puede pensarse que $x^2 + 3x - 4 > 0$ implica $x^2 + 3x > 4$ lo ello equivale a $x^2 + 3x + \frac{9}{4} > 4 + \frac{9}{4}$ es decir $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 > \left(\frac{5}{2}\right)^2$ o bien

$\left|x + \frac{3}{2}\right| > \frac{5}{2}$ lo cual implica $\begin{cases} x + \frac{3}{2} > \frac{5}{2} \\ \vee \\ x + \frac{3}{2} < -\frac{5}{2} \end{cases}$ es decir $\begin{cases} x > \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \\ \vee \\ x < -\frac{5}{2} - \frac{3}{2} \end{cases}$ o su equivalente $\begin{cases} x > 1 \\ \vee \\ x < -4 \end{cases}$

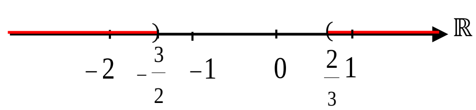
Luego $S = (-\infty,-4) \cup (1,+\infty)$. Su representación gráfica se muestra en la figura



Ejemplo 4. El conjunto solución de la inecuación $6 - 5x - 6x^2 < 0$ puede hallarse pensando que la desigualdad $6 - 5x - 6x^2 < 0$ equivale a $(2x+3)(2-3x) < 0$ donde el estudio de signos señala

$-\infty$ a $-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$ a $\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$ a $+\infty$	$\mathbb{R}$
$-$	$+$	$+$	$2x+3$
$+$	$+$	$-$	$2-3x$
$-$	$+$	$-$	

Luego $S = \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$. Su representación gráfica se exhibe en la figura



Inecuaciones Polinómicas de Grado Mayor a 2

En la práctica, el estudio de los signos es suficiente para identificar el conjunto solución de las inecuaciones cuadráticas o aquellas de grado mayor a 2, así como el de las inecuaciones racionales, tal como se ilustra en los ejemplos siguientes:

Ejemplo 1. Hallar el conjunto solución de la inecuación $2x^3 + x^2 - 7x - 6 \geq 0$ implica:

(i) Factorizar el polinomio del primer miembro de la desigualdad. Para ello, éste puede imaginarse como una igualdad y hallar las raíces de la ecuación, las identidades resultantes se transforman en factores cuyo producto es la factorización del polinomio. Esto es

	2	1	-7	-6
-1		-2	1	6
	2	-1	-6	0
2		4	6	
	2	3	0	

La división sintética indica que $(x+1)$, $(x-2)$ y $(2x+3)$ son los factores de $2x^3 + x^2 - 7x - 6$, luego $2x^3 + x^2 - 7x - 6 = (x+1)(x-2)(2x+3)$;

(ii) Estudiar los signos de $(x+1)(x-2)(2x+3) \geq 0$ como indica la tabla

$-\frac{3}{2}$	-1	2		$\mathbb{R}$
$-$	$-$	$+$	$+$	$x+1$
$-$	$-$	$-$	$+$	$x-2$
$-$	$+$	$+$	$+$	$3x+1$
$-$	$+$	$-$	$+$	

Luego $S = \left(-\frac{3}{2}, -1\right) \cup (2, +\infty)$ es el conjunto solución de la inecuación en estudio.

Inecuaciones racionales

Una inecuación racional es una desigualdad de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ o bien $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$, donde P y Q son polinomios. Cuando el $\text{grad}[P(x)] = 0$ y $\text{grad}[Q(x)] = 1$, el conjunto solución se determina del mismo modo que en las inecuaciones lineales, en otro caso se procede con la transformación y/o factorización de P y Q seguido del estudio de signos ilustrado arriba

Ejemplo 1. Para hallar el conjunto solución de la inecuación $\frac{2}{x-1} < 0$ es suficiente con:

(i) determinar el intervalo donde $x - 1 < 0$ es decir $x < 1$, debido a que $P(x) = 2 > 0$, luego $S = (-\infty, 1)$

Ejemplo 2. Al hallar el conjunto solución a la inecuación $\frac{2x-3}{3x+1} \geq 0$ se tiene que:

(i) Estudiar el cabio de signos de los factores como en las inecuaciones cuadráticas,

	$-\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\mathbb{R}$
$-$	$-$	$+$	$2x-3$
$-$	$+$	$+$	$3x+1$
$+$	$-$	$+$	

(ii) Escribir el conjunto solución $S=\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cup\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$.

Ejemplo 3. Hallar el conjunto solución de la inecuación $\frac{2x+1}{x-2}\leq 1$ implica:

(i) Desigualar a cero seguido de la transformación del primer miembro de la desigualdad, es decir $\frac{2x+1}{x-2}-1\leq 0$ esto es $\frac{2x+1-(x-2)}{x-2}\leq 0$ o su equivalente $\frac{x+3}{x-2}\leq 0$

(ii) Estudiar el cambio de signos de los factores que componen la desigualdad

	-3	2	$\mathbb{R}$
$-$	$+$	$+$	$x+3$
$-$	$-$	$+$	$x-2$
$+$	$-$	$+$	

Luego $S=[-3,2)$ es el conjunto solución

Ejemplo 4. Al hallar el conjunto solución de la inecuación $\frac{3x^2+4x-4}{2x^2-x-6}>0$ se tiene que:

(i) factorizar los polinomios que componen la inecuación y escribir su equivalente. Así la inecuación dada $\frac{3x^2+4x-4}{2x^2-x-6}>0$ es equivalente a la desigualdad $\frac{(3x-2)(x+2)}{(2x+3)(x-2)}>0$

(ii) Estudiar el cambio de signos de los factores y escribir el conjunto solución, esto es

	-2	$-\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	2	$\mathbb{R}$
$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$3x-2$
$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$x+2$
$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$2x+3$
$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$x-2$
$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	

Luego $S=(-\infty,-2)\cup\left(-\frac{3}{2},\frac{2}{3}\right)\cup(2,+\infty)$ es el conjunto solución a la inecuación

Ejemplo 5. Para hallar el conjunto solución de $\frac{3}{x+1}+\frac{10}{x+3}\leq\frac{12}{x+2}$ se tiene que:

(i) Desigualar a cero seguido de la ejecución de las operaciones del primer miembro de la desigualdad, esto es $\frac{3}{x+1}+\frac{10}{x+3}-\frac{12}{x+2}\leq 0$ es decir $\frac{3(x+3)(x+2)+10(x+1)(x+2)-12(x+1)(x+3)}{(x+1)(x+3)(x+2)}\leq 0$ o bien $\frac{x^2-3x+2}{(x+1)(x+3)(x+2)}\leq 0$ en definitiva $\frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x+2)(x+3)}\leq 0$

(ii) Estudiar el cambio de signo de los factores y escribir el conjunto solución, es decir

	-3	-2	-1	1	2	$\mathbb{R}$
$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$x-2$
$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$x-1$
$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$x+1$
$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$x+2$
$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$x+3$
$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	

Luego $S = (-\infty, -3) \cup (-2, -1) \cup [1, 2]$ es el conjunto solución a la inecuación

Inecuaciones Modulares

Si la inecuación tiene valor absoluto en uno de sus miembros o ambos, el conjunto solución se determina aplicando las propiedades del módulo señaladas arriba.

Ejemplo 1. Al hallar el conjunto solución de la inecuación $\left|\frac{x}{x-1}\right| \leq \frac{1}{2}$ se tiene:

(i) Suprimir el módulo aplicando sus propiedades, es decir:

$\left|\frac{x}{x-1}\right| \leq \frac{1}{2}$ implica $\begin{cases} \frac{x}{x-1} \leq \frac{1}{2} \\ \wedge \\ \frac{x}{x-1} \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$ es decir $\begin{cases} \frac{x}{x-1} - \frac{1}{2} \leq 0 \\ \wedge \\ \frac{x}{x-1} + \frac{1}{2} \geq 0 \end{cases}$ o su equivalente $\begin{cases} \frac{x+1}{2(x-1)} \leq 0 \\ \wedge \\ \frac{3x-1}{2(x-1)} \geq 0 \end{cases}$;

(ii) Estudiar el cambio de signo de los factores de las inecuaciones del sistema, para determinar el conjunto solución de cada inecuación, esto es:

El sistema resultante $\begin{cases} \frac{x+1}{(x-1)} \leq 0 \\ \wedge \\ \frac{3x-1}{(x-1)} \geq 0 \end{cases}$ implica $\begin{cases} S_1 = [-1, 1) \\ \wedge \\ S_2 = \left(-\infty, \frac{1}{3}\right] \cup (1, +\infty) \end{cases}$;

(iii) Determinar la intersección entre los conjuntos solución de las inecuaciones del sistema, que es el conjunto solución requerido, vale decir

$S_1 \cap S_2 = [-1, 1) \cap \left(\left(-\infty, \frac{1}{3}\right] \cup (1, +\infty)\right)$. En consecuencia $S = \left[-1, \frac{1}{3}\right]$.

Ejemplo 2. Hallar el conjunto solución a la inecuación $\left|\frac{x^2+x+1}{x+1}\right| < \frac{3}{2}$ implica

(i) Suprimir el módulo aplicando sus propiedades, es decir

$\begin{cases} \frac{x^2+x+1}{x+1} < \frac{3}{2} \\ \wedge \\ \frac{x^2+x+1}{x+1} > -\frac{3}{2} \end{cases}$ esto es $\begin{cases} \frac{x^2+x+1}{x+1} - \frac{3}{2} < 0 \\ \wedge \\ \frac{x^2+x+1}{x+1} + \frac{3}{2} > 0 \end{cases}$ o bien $\begin{cases} \frac{2x^2-x-1}{x+1} < 0 \\ \wedge \\ \frac{2x^2+5x+5}{x+1} > 0 \end{cases}$ pero al factorizar se tiene

(ii) Hallar el conjunto solución de las inecuaciones del sistema, esto es

$$\begin{cases} \frac{(x-1)(2x+1)}{(x+1)} < 0 \\ \wedge \\ \frac{2x^2+5x+5}{x+1} > 0 \end{cases} \text{ el cual implica } \begin{cases} S_1 = (-\infty,-1) \cup \left(-\frac{1}{2}, 1\right) \\ \wedge \\ S_2 = (-1,+\infty) \end{cases}$$

(iii) Determinar S por intersección de $S_1 \cap S_2 = \left((-\infty,-1) \cup \left(-\frac{1}{2},1\right)\right) \cap (-1,+\infty)$ es decir $S = \left(-\frac{1}{2},1\right)$.

Ejemplo 3. Al determinar el conjunto solución de $\left|\frac{x+2}{x}\right| < |x-1|$ se debe:

(i) Aplicar las propiedades del módulo para suprimir el valor absoluto en ambos lados de la desigualdad, esto es $\left|\frac{x+2}{x}\right| < |x-1|$ implica $\begin{cases} \frac{x+2}{x} < |x-1| \\ \wedge \\ \frac{x+2}{x} > -|x-1| \end{cases}$ es decir $\begin{cases} |x-1| > \frac{x+2}{x} \\ \wedge \\ |x-1| > -\frac{x+2}{x} \end{cases}$ o bien $\begin{cases} x-1 > \frac{x+2}{x} \\ \vee \\ x-1 < -\frac{x+2}{x} \\ \wedge \\ x-1 > -\frac{x+2}{x} \\ \vee \\ x-1 < \frac{x+2}{x} \end{cases}$ así

$$\begin{cases} \begin{cases} x-1-\frac{x+2}{x} > 0 \\ \vee \\ x-1+\frac{x+2}{x} < 0 \end{cases} \\ \wedge \\ \begin{cases} x-1+\frac{x+2}{x} < 0 \\ \vee \\ x-1-\frac{x+2}{x} < 0 \end{cases} \end{cases} \text{ luego } \begin{cases} \begin{cases} \frac{x^2-2x-2}{x} > 0 \\ \vee \\ \frac{x^2+2}{x} < 0 \end{cases} \\ \wedge \\ \begin{cases} \frac{x^2+2}{x} > 0 \\ \vee \\ \frac{x^2-2x-2}{x} < 0 \end{cases} \end{cases} \text{ o también } \begin{cases} \begin{cases} \frac{[x-(1+\sqrt{3})][x-(1-\sqrt{3})]}{x} > 0 \\ \vee \\ \frac{x^2+2}{x} < 0 \end{cases} \\ \wedge \\ \begin{cases} \frac{x^2+2}{x} > 0 \\ \vee \\ \frac{[x-(1+\sqrt{3})][x-(1-\sqrt{3})]}{x} < 0 \end{cases} \end{cases}$$

(ii) Se determina el conjunto solución de cada subsistema del sistema, es decir

$$\begin{cases} \begin{cases} S_1 = \left((1-\sqrt{3}),0\right) \cup \left((1+\sqrt{3}),+\infty\right) \\ \vee \\ S_2 = (0,+\infty) \end{cases} \\ \wedge \\ \begin{cases} S_3 = (0,+\infty) \\ \vee \\ S_4 = \left[(1-\sqrt{3}),0\right] \cup \left[(1+\sqrt{3}),+\infty\right) \end{cases} \end{cases} \text{ o su equivalente } \begin{cases} S_A = (-\infty,0) \cup \left[(1+\sqrt{3}),+\infty\right) \\ \wedge \\ S_B = \left[(1-\sqrt{3}),+\infty\right) \end{cases}$$

(iii) Se determina la solución al sistema por intersección de las soluciones parciales

$S_T = \left((1-\sqrt{3}),0\right) \cup \left((1+\sqrt{3}),+\infty\right)$

Ecuaciones e inecuaciones exponenciales y logarítmicas

En las ecuaciones e inecuaciones derivadas de la función exponencial y logarítmica, objeto matemático presente en la educación básica pero cuyo estudio se retoma en la formación universitaria, el conjunto solución se determina atendiendo a la definición y las propiedades que rigen dicho objeto matemático, que son:

(i) **Definición**. El logaritmo del número «y» de base «a» es $\log_a y = x \leftrightarrow a^x = y$, luego la identidad logarítmica se satisface si se cumple la identidad exponencial y a la inversa.

Ejemplo 1. ¿Cuál es el $\log_{\sqrt{3}} 243$?

Si $\log_{\sqrt{3}} 243 = x$ entonces $(\sqrt{3})^x = 243$ o bien $3^{\left(\frac{x}{2}\right)} = 3^5$, luego $x = 10$. En consecuencia $\log_{\sqrt{3}} 243 = 10$

Ejemplo 2. ¿Cuál es el $\log_{\left(\frac{1}{2}\right)} 16$?

Si $\log_{\left(\frac{1}{2}\right)} 16 = x$ entonces $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 16$ o bien $2^{-x} = 2^4$, luego $x = -4$. En consecuencia $\log_{\left(\frac{1}{2}\right)} 16 = -4$

(ii) Propiedades

1. $\log_a 1 = 0$ «en este contexto, para escribir el número 0, se escribe $\log_a 1$»
2. $\log_a a = 1$ «en este contexto, para escribir el número 1, se escribe $\log_a a$»
3. $\log_a x.y = \log_a x + \log_a y$ «el logaritmo es un homomorfismo que transforma el producto en una suma»
4. $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ «el logaritmo es un homomorfismo que transforma el cociente en una diferencia»
5. $\log_a x^n = n \log_a x$ «el logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base»
6. $\log_a a^x = x$ «identidad logarítmica»
7. $a^{\log_a x} = x$ «identidad exponencial»
8. $\log_a x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} a}$ para $a > 1$ «equivalencia entre las bases de los logaritmos»

Ejemplo 1. Para hallar el valor de «x» en la identidad $\frac{64^{x-1}}{4^{x-1}} = 256^{2x}$ se tiene:

(i) Escribir la identidad equivalente en una misma base, así

$\frac{64^{x-1}}{4^{x-1}} = 256^{2x}$ implica $\frac{(4^3)^{x-1}}{4^{x-1}} = (4^4)^{2x}$ o bien $4^{(3x-3)-(x-1)} = 4^{8x}$, al componer con $\log_4$ en ambos lados de la igualdad, se tiene $\log_4[4^{(2x-2)}] = \log_4[4^{8x}]$ esto es $2x - 2 = 8x$, luego $x = -\frac{1}{3}$ o también $S = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$ es el conjunto solución de la ecuación dada.

Ejemplo 2. Hallar el conjunto solución de la ecuación $2^{x+2} + \frac{4}{2^x} = 8$ implica

(i) Escribir una ecuación equivalente que se reduzca a una forma algebraica conocida, $2^{x+2} + \frac{4}{2^x} = 8$ equivale a $2^x.2^{(x+2)} + 4 = 8.2^x$ o bien $2^{2x+2} - 8.2^x + 4 = 0$ es decir $2^2.(2^x)^2 - 8.(2^x) + 4 = 0$ que es una ecuación cuadrática cuando $u = 2^x$, esto es $4u^2 - 8u + 4 = 0$

(ii) Resolver la ecuación equivalente, devolver el cambio y establecer la solución, así $4u^2 - 8u + 4 = 0$ implica $4.(u-1)^2 = 0$, luego $u = 1$, entonces $2^x = 1$ o también $2^x = 2^0$. En consecuencia $x = 0$ o también $S = \{0\}$ es el conjunto solución

Ejemplo 3. Al resolver la ecuación $\log_2(x-1) - \log_2(x+1) = 1$ se tiene

(i) Escribir una ecuación equivalente con forma algebraica conocida, así $\log_2(x-1) - \log_2(x+1) = 1$ equivale a $\log_2\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 1$ entonces $2^1 = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ es la expresión algebraica asociada

(ii) Resolver la ecuación encontrada y escribir el conjunto solución, así $2(x+1)=x-1$ es decir $x=-3$ o también $\mathrm{S}=\{-3\}$ es el conjunto solución

Ejemplo 4. Encontrar el conjunto solución de la inecuación $2^{x^2-2x-3}\geq 1$ implica

(i) Escribir la desigualdad equivalente en términos algebraicos, esto es $2^{x^2-2x-3}\geq 1$ implica $2^{x^2-2x-3}\geq 2^0$ o también $\log_2\left(2^{x^2-2x-3}\right)\geq \log_2 2^0$ de este modo $x^2-2x-3\geq 0$ es la desigualdad algebraica asociada

(ii) Resolver la inecuación equivalente y escribir el conjunto solución

$\mathrm{S}=(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$

Ejemplo 5. Hallar el conjunto solución de la inecuación $\ln\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)\geq 0$ implica

(i) Escribir la desigualdad equivalente en términos algebraicos, así $\ln\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)\geq 0$ implica $\ln\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)\geq \ln 1$, luego $e^{\ln\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)}\geq e^{\ln 1}$ o bien $\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)\geq 1$ es la inecuación algebraica asociada

(ii) Resolver la inecuación equivalente y escribir el conjunto solución, esto es $5x-x^2-4\geq 0$ o también $x^2-5x+4\leq 0$ esto es $(x-1)(x-4)\leq 0$ luego $\mathrm{S}=[1,4]$ es el conjunto solución

Actividad Nº 5

I. Encuentre la solución o conjunto solución de las ecuaciones siguientes:

1) $x^2 - 7x + 12 = 0$;
2) $x^2 + x - 6 = 0$;
3) $x^2 + 5x + 6 = 0$;
4) $2x^2 - 3x - 2 = 0$;
5) $6x^2 - 5x - 6 = 0$;
6) $9x^2 + 6x + 1 = 0$;
7) $2x^2 - 5x + 6 = 0$;
8) $6 - x - 2x^2 = 0$;
9) $x(x+3) - 2x(4-x) = 8$;
10) $\frac{1}{3}x^2 - \frac{7}{12}x + \frac{1}{4} = 0$;
11) $\frac{4}{5x} = \frac{7}{x^2+6}$;
12) $3 - \frac{6}{x-2} = \frac{5x-4}{x^2-4}$;
13) $2x^2 - k^2x - k^4 = 0$;
14) $2x^2 - (a+b)x - (a+b)^2 = 0$;
15) $4x^2p^2 - 12xp + 9 = 0$;
16) $x^4 - 20x^2 + 19 = 0$;
17) $9x^4 = 40x^2 - 16$;
18) $\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{8} = \frac{x^4}{16} + 50$;
19) $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$;
20) $x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 20x + 48 = 0$;
21) $x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24 = 0$;
22) $12x^3 + 4x^2 - 17x + 6 = 0$;
23) $12x^4 - 32x^3 + 3x^2 + 23x + 6 = 0$;
23) $2x^5 + x^4 - 10x^3 - 5x^2 + 8x + 4 = 0$;

II. Encuentra el conjunto solución de las siguientes inecuaciones

1) $2x^2 + 3x - 2 \geq 0$;
2) $2 + 3x - 2x^2 \leq 0$;
3) $9x^2 - 6x + 1 \leq 0$;
4) $4x^2 - 12x + 9 > 0$;
5) $9x^2 - 30x + 25 < 0$;
6) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x - 1 \geq 0$;
7) $5x(x+2) \leq x(x-6)$;
8) $(4x+3)(7x+1) > 9(3x^2+2x) + 7(x+12)$;
9) $(x-2)^2 \leq x - 2$;
10) $5x^2 - 2x - 11(x+1) < -(x+1)^2$;
11) $\sqrt{(x+4)^2} \geq 2x + 1$;
12) $x^4 - 8x^2 - 9 < 0$;
13) $1 - 17x^2 \geq -16x^4$;
14) $x^4 - 4x^2 + 18 \leq 2(4x^2 - 1)$;
15) $2x^3 + x^2 - 5x + 2 < 0$;
16) $4 + 12x + 3x^2 - 13x^3 - 6x^4 \geq 0$;
17) $36x^5 - 25x^3 + 4x > 0$
18) $2x^5 - x^4 - 10x^3 + 5x^2 + 8x - 4 < 0$;
19) $\frac{3x+2}{2x-1} \geq 0$;
20) $\frac{3-2x}{2x+3} \leq 0$;
21) $\frac{x}{x+1} \geq -\frac{1}{2}$;
22) $\frac{1-x}{x+1} \leq \frac{1}{3}$;
23) $\frac{3x}{x-1} - 1 < \frac{1}{2}$;
24) $\frac{x^2+x-2}{x-1} > 1$;
25) $\frac{3x^2+x-2}{2x^2+x-3} \geq 0$;
26) $\frac{2(x-10)}{3} < -\frac{14}{x}$;
27) $\frac{4}{5x} > \frac{7}{x^2+6}$;
28) $\frac{2}{x^2-1} \leq \frac{x}{x+1} - \frac{6x}{x-1}$;
29) $\frac{2x^3 - 7x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2x + 1} < 0$;
30) $\frac{x^5 + 2x^4 - 5x^3 - 10x^2 + 4x + 8}{x^3 - 5x^2 - 9x + 45} > 0$;
31) $\left|\frac{1-x}{1+x}\right| < \frac{1}{2}$;
32) $\left|\frac{x^2-2}{3x-2}\right| < 1$;
33) $\left|\frac{1-x-x^2}{x+1}\right| < \frac{1}{2}$;
34) $|x^2 - 5x - 1| \geq x^2 - 3$;

35) $\left|\frac{x^2+1}{x}\right| < x-3$;

36) $\left|\frac{2x^2-3}{x-1}\right| > x-3$;

37) $|x+1| > |x|$;

38) $|x-1| < |x+1|$;

39) $|1+2x-x^2| > |-x^2+3x-2|$;

40) $|9-2x| \geq |4x|$;

41) $\ln(2x^2-x-5) > 0$;

42) $2^{x^2-1} \leq 8$;

43) $\log_2\left(\frac{x^2-3}{2x+1}\right) > 1$

44) $e^{\frac{x^2-4}{3x+1}} < 1$;

III. Resuelva cada uno de los planteamientos siguientes:

1) Si un número duplica a otro y 12 es la diferencia de sus cuadrados, entonces los números son:

2) ¿Cuáles son los dos números positivos cuya diferencia es 3 y la suma de sus cuadrados es 65?

3) ¿Cuáles son los dos números naturales consecutivos pares cuya suma de cuadrados es 100?

4) ¿Cuál es el perímetro de un rectángulo, cuyo largo excede en 10cm a su ancho y tiene un área 56cm^2?

5) Sabiendo que la altura de un triángulo rebasa a su base en 3cm y que su área alcanza a 27cm^2, ¿cuál es la longitud de la base y la altura del triángulo?

6) El piso de un salón está recubierto por 1200 baldosas, si el número de mosaicos en cada fila excede en 10 al número de filas. ¿Cuántas baldosas hay en cada fila?

7) Hace 29 años la edad de Juan era la raíz cuadrada de la edad que tendrá en un año. ¿Qué edad tiene Juan en la actualidad?

8) Un granjero compro cierto número de pollitos por Bs. 150. Si hubiese comprado 5 pollitos más por el mismo dinero, cada pollito le habría costado 5 bolívares menos. ¿Cuántos pollitos compro el granjero?

9) Si la suma de dos números es 23 y su producto 120, ¿cuáles son los números?

10) ¿Cuál es el valor de k para que la ecuación $3x^2-kx+3=0$ tenga dos raíces iguales?

POST-TEST

Tiempo. 1 hora con 30 minutos

INSTRUCCIONES

A continuación hay un conjunto de interrogantes, cada una con cuatro respuestas probables pero sólo una es correcta, selecciónela encerrando en un círculo la letra que se corresponda con ésta. Si es necesario, efectué cálculos antes de emitir respuesta.

1. De las expresiones siguientes, la que no representa una igualdad, es:

a) $\frac{17}{10} = 1{,}7\text{x}10^{0}$

b) $\frac{543}{10000} = 5{,}43\text{x}10^{-1}$

c) $\frac{3}{100} = 3\text{x}10^{-2}$

d) $\frac{5}{1000} = 0{,}005$

2. El inverso del número $\frac{\left(\frac{1}{3}\right) + 2^{-1}}{3^{-1} + \left(\frac{1}{4}\right)}$ es:

a) $\frac{10}{7}$

b) $\frac{7}{10}$

c) $\frac{5}{6}$

d) $\frac{7}{12}$

3. Al operar la expresión $\frac{5^{-3} + 5^{-2}}{5^{-3}}$ resulta:

a) 6

b) 5

c) 30

d) 25

4. Descuentos sucesivos del 12% y 15% equivalen a un único descuento de:

a) 27%

b) $25{,}2\%$

c) $27{,}2\%$

d) 25%

5. Pedro Pérez ganaba Bs. 50.000, si su sueldo se aumenta en 20% y por concepto de impuestos se le disminuye un 5%, entonces su nuevo sueldo es:

a) 57.000

b) 60.000

c) 57.500

d) 59.400

6. El valor de $\left\{\left[\left(-\frac{3}{4}\right)^{-1}\right]^{3}\right\}^{-1} . \left[\left(\frac{2^2}{3}\right)^{2}\right]$ es:

a) $\frac{3}{4}$

b) $-\frac{4}{3}$

c) $-\frac{3}{4}$

d) $\frac{4}{3}$

7. Si $x = 2$ y $y = 3$ entonces el valor de $(2^{-x} + 2^{-y})^{-1}$ es:

a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{3}{8}$

c) $\frac{8}{3}$

d) $\frac{1}{8}$

8. El valor de «x» en la expresión $\frac{\sqrt{\sqrt[3]{7}}}{\sqrt[4]{\sqrt{7}}} = \sqrt[x]{7}$ es:

a) 24

b) 12

c) 3

d) 2

9. Al operar la expresión $\frac{3^{\left(\frac{3}{2}\right)} . \sqrt[3]{9}}{9 . \sqrt[6]{3}}$ resulta:

a) 1

b) $\sqrt[6]{3}$

c) 3

d) $\sqrt[3]{9}$

10. El valor de «p» que hace cierta la igualdad $(2x+3)(5x-3) = 10x^2 + \mathrm{p}x - 9$ es:

a) -6

b) 9

c) 15

d) 10

11. El valor de «p» para que el trinomio $4x^2 - 12x + \mathrm{p}$ sea un cuadrado perfecto, es:

a) 3

b) 9

c) -9

d) 4

12. La ejecución del producto $(5x+2)(5x-2)$ tiene por resultado:

a) $10x^2 + 4$

b) $25x^2 + 4$

c) $25x^2 - 4$

d) $10x - 4$

13. Al factorizar la expresión $-(25x^2 - 9) + (5x-3)^2 - (3-5x)$ es:

a) $(3-5x)$

b) $(5x-3)^2$

c) $-(25x^2 - 9)$

d) $-5(5x-3)$

14. Cuando $x \neq 5$ la expresión $\frac{(x^2-10x+25)(x^2+5x+25)}{(x^3-125)(x-5)}$ equivale a:

a) 1

b) 3

c) 5

d) 4

15. Si $x \neq 2$ entonces el cociente $\frac{x^2 - 5x + 6}{4 - x^2}$ equivale a:

a) $\frac{x-3}{x-2}$

b) $\frac{3-x}{2+x}$

c) $\frac{x-3}{x+2}$

d) $\frac{x+3}{x-2}$

16. La fracción equivalente a la expresión $\frac{\frac{1}{x}+\frac{2}{y}}{\frac{y}{2x}-\frac{2x}{y}}$ es:

a) $\frac{2}{y-2x}$

b) $\frac{xy}{y+2x}$

c) $\frac{2}{y+2x}$

d) $\frac{y+2x}{y-2x}$

17. Si $x > 0$ entonces la suma de las raíces de la ecuación $\sqrt{4x+5} = x$ es igual a:

a) 6

b) 5

c) 4

d) 7

18. Un número excede a otro en 2 unidades y la suma de sus cuadrados es 130, entonces el número mayor es:

a) 7

b) 9

c) -7

d) 16

19. Siendo $1 < x < \pi$ entonces siempre es cierto que:

a) $\frac{1}{x} < \frac{1}{\pi}$

b) $x < \frac{1}{\pi}$

c) $\pi < x < 1$

d) $\frac{1}{\pi} < \frac{x}{\pi} < 1$

20. Si $A = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ y $\mathrm{B} = \left\{x \in \mathbb{R} / -\frac{3}{4} < x < \frac{3}{4}\right\}$ entonces $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ es el intervalo

a) $\mathrm{S} = \left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$

b) $\mathrm{S} = (-\infty, +\infty)$

c) $\mathrm{S} = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

d) $\mathrm{S} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

21. El conjunto solución de la inecuación $\frac{x}{x-1} < 2$ es:

a) $\mathrm{S} = (1, 2)$

b) $\mathrm{S} = (-\infty, 1)$

c) $\mathrm{S} = (2, +\infty)$

d) $\mathrm{S} = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$

22. Los valores de «x» que satisfacen la desigualdad $-1 \leq \frac{3 - 2x}{-4} \leq 1$ están entre:

a) $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{7}{4}$

b) $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{7}{2}$

c) $\frac{1}{2} < x < \frac{7}{2}$

d) $\frac{1}{2} \leq x \leq 7$

23. El conjunto solución de la inecuación $\left|\frac{1 - x - x^2}{x + 1}\right| < \frac{1}{2}$ es:

a) $\mathrm{S} = \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup (1, +\infty)$

b) $\mathrm{S} = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3 + \sqrt{17}}{4}\right)$

c) $\mathrm{S} = \left(\frac{-3 - \sqrt{17}}{4}, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(1, \frac{3 + \sqrt{17}}{4}\right)$

d) $\mathrm{S} = (-\infty, +\infty)$

24. Si $x + y = 4$ y $x^2 - y^2 = 4$ entonces el valor de «x» es:

a) 5

b) $\frac{5}{2}$

c) 2

d) $\frac{2}{5}$

25. La solución a la inecuación $\ln\left(\frac{x^2-2}{2x+1}\right) < 0$ es el intervalo:

a) $(-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{2}, 3\right)$

b) $\left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup (3, +\infty)$

c) $\left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup (3, +\infty)$

d) $\left(-\frac{1}{2},\ 3\right)$

26. Hace 4 años la edad de Juan era el triple de la edad de José, si dentro de 2 años la edad de Juan será el doble de la edad de José. ¿Cuál es la edad de Juan?

a) 10

b) 22

c) 20

d) 30

27. Jesús tiene Bs. 3700 en 95 billetes de Bs. 20 y de Bs. 50. ¿Cuántos billetes de Bs. 20 tiene?

a) 35

b) 20

c) 60

d) 50

28. Si $\left(\frac{1}{9}\right)^{-2} = 3^x$ entonces el valor de «x» es:

a) 4

b) 3

c) 2

d) 1

29. Si $9^{3x} = 81^{y}$ entonces el valor de $\frac{x}{y}$ es:

a) $\frac{2}{3}$

b) 3

c) $\frac{3}{2}$

d) 2

30. El valor de «x» que hace cierta la igualdad $\log(x^2 - 25) - \log(x + 5) = 3$ es:

a) 1000

b) 1005

c) 5

d) 8

RESPUESTAS A PRE-TEST Y POST-TEST

Respuestas a Pre-Test

1) (a);	2) (c);	3) (b);	4) (a);	5) (c);
6) (b);	7) (a);	8) (c);	9) (b);	10) (a);
11) (d);	12) (a);	13) (c);	14) (a);	15) (a);
16) (d);	17) (c);	18) (b);	19) (b);	20) (d);

Respuestas a Post-Test

1) (b);	2) (b);	3) (a);	4) (b);	5) (a);
6) (c);	7) (c);	8) (a);	9) (a);	10) (b);
11) (b);	12) (c);	13) (d);	14) (a);	15) (b);
16) (a);	17) (c);	18) (b);	19) (d);	20) (a);
21) (d);	22) (b);	23) (c);	24) (b);	25) (a);
26) (b);	27) (a);	28) (c);	29) (a);	30) (b);

RESPUESTAS A LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS

Respuestas Actividad N° 1

1. 18; 2. 17; 3. 56; 4. 66; 5. 24; 6. 0; 7. 21;

8. 26; 9. 148; 10. 67; 11. 1; 12a. 70; 12b. 60; 13. 36;

14. 0; 15a. $71 \in \mathbb{N}$; 15b. $199 \in \mathbb{N}$ 15c. $389 \in \mathbb{N}$; 15d. $79 \in \mathbb{N}$;

15e. $-3 \in \mathbb{N}$; 15f. $119 \in \mathbb{N}$; 15g. $-1 \in \mathbb{Z}$; 15h. $-1 \in \mathbb{Z}$; 16a. primo;

16b. primo; 16c. primo; 16d. primo; 16e. primo; 16f. primo;

16g. primo; 16h. primo; 16i. primo; 16j. compuesto;

17a. $D_{54} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54\}$; 17b. $D_{130} = \{1, 2, 5, 10, 13, 26, 65, 130\}$;

17c. $D_{240} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 48, 60, 80, 120, 240\}$;

17d. $D_{210} = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105, 210\}$;

17e. $D_{162} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54, 81, 162\}$;

17f. $D_{204} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12, 17, 34, 51, 68, 102, 204\}$;

17g. $D_{1800} = \left\{\begin{matrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 25, 30, 36, 40, 45, 50, 60, 72, \\ 75, 90, 100, 120, 150, 180, 200, 225, 300, 360, 450, 600, 900, 1800 \end{matrix}\right\}$;

17h. $D_{735} = \{1,3,5,7,15,21, 35, 49,147,105,245, 735\}$;

18a. $49896 = 2^3 . 3^4 . 7 . 11$;

18b. $(1995)^3 = 3^3 . 5^3 . 7^3 . 19^3$;

18c. $26460 = 2^2 . 3^3 . 5 . 7^2$;

18d. $[(12)^4 . 18 . (21)^3]^5 = 2^{45} . 3^{45} . 7^{15}$;

18e. $[(147) . (10)^2]^3 = 2^6 . 3^3 . 5^6 . 7^6$;

19a. $\text{M.C.D.}(48, 36, 96) = 12$ y $\text{m.c.m.}(48,36,96) = 288$;

19b. $\text{M.C.D.}(80,27,40) = 1$ y $\text{m.c.m.}(80,27,40) = 2160$;

19c. $\text{M.C.D.}(32,48,10) = 2$ y $\text{m.c.m.}(32,48,10) = 480$;

19d. $\text{M.C.D.}(75,375,45) = 15$ y $\text{m.c.m.}(75,375,45) = 1125$;

19e. $\text{M.C.D.}(8,10,15,32) = 1$ y $\text{m.c.m.}(75,375,45) = 480$;

Respuestas Actividad N° 2

1. 5; 2. 4; 3. 100; 4. 20; 5. 62 y 178; 6. 8 y 42;

7. 32 8. 26; 9. 10 y 20; 10. 135; 11. 11; 12. 17;

13. $x = 11,\ y = 22,\ z = 33,\ w = 66$; 14. 12 y 24; 15. 7 y 21; 16. 5;

17. 60; 18. 12; 19. 10; 20. 17; 21. 25; 22. 14%;

Respuestas Actividad N° 3

Parte I

1. $\frac{17}{24}$; 2. $\frac{3}{100}$; 3. $-\frac{1}{20}$; 4. 0; 5. $-\frac{1}{12}$; 6. $\frac{1}{9}$;

7. $\frac{21}{5}$; 8. $\frac{1}{756}$; 9. $-\frac{67}{105}$; 10. $\frac{3}{4}$; 11. $\frac{7}{10}$; 12. $\frac{1}{6}$;

13. $\frac{11}{15}$; 14. $-\frac{1}{6}$; 15. $-\frac{27}{70}$; 16. $-\frac{11}{30}$; 17. $-\frac{9}{14}$; 18. $\frac{1857}{700}$;

19. $-\frac{386}{675}$; 20. $\frac{x^3 w^5}{7z}$; 21. $\frac{9a}{b^3 (cd)^2}$; 22. $\frac{1}{a^8 b^{14} c^{10}}$; 23. $\left(3^5 2^{\frac{5}{2}} a^{\frac{31}{4}} b^{\frac{17}{4}} c^{\frac{37}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$;

24. $-\frac{2^3 3^6}{7^3}$; 25. $\left(\frac{a}{b} \frac{x^2}{y^2}\right)^{15}$; 26. $2abc\sqrt{\frac{ac}{3}}$; 27. $\frac{ab}{x}\sqrt[5]{\frac{27a^4 b^2 d^3}{8xy^3}}$; 28. $\sqrt[3]{\frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}}$;

29. $\frac{1}{ab}\sqrt[24]{\frac{512}{a^2 b^{15}}}$; 30. $\frac{2}{b}\sqrt[12]{\frac{729b^6}{4x^3 a^5}}$; 31. $\frac{3x^3 y m^6}{nc^2}\sqrt[60]{\frac{3^{20} x^{20} y^{50} m^2}{2^{45} n^{23} c^{17} a^{15}}}$; 32. $\sqrt[288]{\frac{m^{31}}{2^{23} 3^5 a^{177} b^{53}}}$;

33. $\frac{(a+b)\sqrt{a-b}}{a-b}$; 34. $\frac{61}{5}\sqrt{2}$; 35. $-\frac{103}{7}\sqrt{3}$; 36. $\frac{701}{60}\sqrt{3}$; 37. $\frac{58}{15} ab\sqrt[3]{ab^2}$;

38. $\frac{31}{20}\sqrt{5} + \frac{1279}{840}\sqrt[3]{7}$; 39. $\frac{229}{60}\sqrt[3]{3}$; 40. $[6 - (a - b)]\sqrt{a - b}$; 41. $-(\frac{16}{15}\sqrt{2} + \frac{7}{3}\sqrt[3]{7})$;

Parte II

1. $34\sqrt{3}$; 2. $5\sqrt{5}$; 3. $\frac{\sqrt{7ab}}{ab}$; 4. $\sqrt[3]{5}$; 5. $\sqrt[5]{4x^2}$; 6. $2\sqrt[3]{9}$;

7. $\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{x+y}$; 8. $\frac{7\sqrt[3]{(3x-2)^2}}{3x-2}$; 9. $\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{x-y}$; 10. $1 - \frac{\sqrt{5}}{5}$; 11. $\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{a-b}$;

12. $\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{x-y}$; 13. $-\frac{3\sqrt[4]{4}(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{4}$; 14. $\frac{3a\sqrt[4]{(a^4+b^4)^3}}{a^4+b^4}$; 15. $\frac{\sqrt{6}}{6}$;

16. $19+6\sqrt{10}$; 17. $\frac{[(x-4)-\sqrt{x-2}]}{(x-6)}$; 18. $\frac{x+2\sqrt{xy-y^2}}{x-2y}$; 19. $\frac{4a\sqrt{1-4a^2}+1}{8a^2-1}$;

20. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt[3]{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}$; 21. $\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$;

Parte III

1. $x=46$; 2. $x=\frac{144}{275}$; 3. $x=\frac{600}{103}$; 4. $x=\frac{21}{8}$; 5. $x=\frac{142}{25}$; 6. $x=\frac{2}{3}$;

7. $x=-\frac{9}{4}$; 8. $x=9$;

Parte IV

1. $k=6$; 2. $k=0$; 3. $k=5$; 4. $k=3$; 5. 16; 6. $x=-1$;

7. $x=5$; 8. $y=3$; 9. $y=-4$;

Parte V

1.a $\{x\in\mathbb{R}\,/\,-3\le x\le\sqrt{5}\}$; 1.b $\left\{x\in\mathbb{R}/-\sqrt{7}<x\le\frac{3}{4}\right\}$; 1.c $\left\{x\in\mathbb{R}/-\frac{13}{5}<x<\frac{\sqrt[3]{8}}{7}\right\}$

1.d $\left\{x\in\mathbb{R}/x<\frac{2}{5}\right\}$; 1.e $\left\{x\in\mathbb{R}/x\ge\frac{\sqrt{5}}{3}\right\}$; 2.a $\left[-\sqrt{3},\frac{3}{5}\right)$; 2.b $\left[-\frac{2}{3},4\right)$;

2.c $\left(-\frac{2}{9},\frac{15}{7}\right)$; 2.d $(-2,4]$; 2.e $[-\sqrt{3},4]$; 2.f $[-\sqrt{3},4)$; 3.a $S=(\frac{5}{12},+\infty)$;

3.b $S=(3\sqrt{3},+\infty)$; 3.c $S=(-\infty,-5(2+\sqrt{2})]$; 3.d $S=[6,+\infty)$;

3.e $S=\left[-\frac{(25+2\sqrt{2})}{6},+\infty\right)$; 3.f $S=\left(-\infty,-\frac{11}{6}\right)$; 3.g $S=\left(-\infty,-\frac{16}{25}\right)$;

Parte VI

1. $\frac{1}{6}$; 2. 1500; 3. $\frac{9}{25}$; 4. $4{,}8$; 5. 170; 6. $40\,\%$;

7. 3.200; 8. 44; 9. 2.800; 10. 130; 11. 600 12. 112000;

13. $\frac{5}{8}$; 14. 60 y 30; 15. 1.155; 16. 29 y 8; 17. $\frac{2}{3}$; 18. 140;

19. 20. 82 y 18; 21. 60; 22. $60\,\%$;

Respuestas Actividad N° 4

Parte I

1. $x^2-10x+25$; 2. $9-6x+x^2$; 3. $9x^2+42x+49$; 4. $x^2+12x+36$;

5. $16x^2-48x+36$; 6. $49+42x+9x^2$; 7. $\frac{4}{25}a^6-\frac{3}{5}a^3b^2+\frac{9}{16}b^4$;

8. $\frac{1}{9}x^2+\frac{4}{9}xy+\frac{4}{9}y^2$; 9. $-\left(\frac{9}{4}x^2+\frac{6}{5}x+\frac{4}{25}\right)$; 10. $\frac{9}{16}a^2+ab+\frac{4}{9}b^2$;

11. $\frac{x^2}{a^2}+2\left(\frac{cxy+ayx+xy}{ac}\right)+\frac{z^2}{c^2}+y^2$; 12. $x^3+6x^2+12x+8$;

13. $\frac{4}{9}x^2+\frac{2}{3}x\left(y+4z+\frac{2}{5}w\right)+\frac{1}{4}y^2+y\left(2z+\frac{w}{5}\right)+4z^2+\frac{4}{5}zw+\frac{w^2}{25}$;

14. $-(a^3+6a^2+12a+8)$; 15. $8x^3-60x^2+300x-125$;

16. $64x^9y^6 - 336x^8y^7 + 588x^7y^8 + 343x^6y^9$;

17. $-\left(\frac{8}{125}a^9 - \frac{9}{25}a^6b^2 + \frac{27}{40}a^3b^4 - \frac{27}{64}b^6\right)$; 18. $\frac{27}{16}a^3 + \frac{9}{8}a^2b + ab^2 + \frac{8}{27}b^3$;

19. $ab\left(a + 3\sqrt[6]{a^5b} + 3\sqrt[3]{a^2b} + \sqrt{ab}\right)$; 20. $-8(x^3 + 6x^2 + 12x + 8)$;

21. $\frac{9}{16}x^2 - \frac{9}{4}x - 10$; 22. $\frac{1}{2} - \frac{5}{12}x - 25x^2$; 23. $-(25 - \frac{20}{3}x + \frac{4}{9}x^2)$;

24. $\frac{9}{25}p^2 - 16$; 25. $\frac{9}{49}y^2 - \frac{4}{25}x^2$; 26. $\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{3}xy + \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{36}z^2$;

27. $\left(\frac{2}{3}x\right)^3 + \left(\frac{1}{2}y\right)^3$; 28. $\left(\frac{1}{2}a\right)^3 - \left(\frac{1}{3}b\right)^3$; 29. $\frac{4}{49}x^2 - \frac{4}{9}y^2 - \frac{3}{7}x + \frac{9}{16}$;

30. $\frac{64}{49}x^6 - \frac{16}{9}y^{10}$;

Parte II

1. $x(x+y)$; 2. $x^2(5x-3)$; 3. $4ab(a-3b^2)$; 4. $12ab^2c(2a^2-3c^2)$;

5. $(p+1)(p-1)$; 6. $(x+3)(a+1)$; 7. $55m^2x(n^3+2n^3x-4x^2)$;

8. $8a^2b(2ab-3a^2b-5b-1)$; 9. $a^2c^2[b^2+(y-x)(y+x)]$; 10. $(x-1)(a+b-1)$;

11. $x(y+2)$; 12. $(x+a)(p-1)$; 13. $(2x+y+z)(a-1)$; 14. $2x(x-a)$;

15. $(a-1)(3a+2b+c)$; 16. $(a+b)(x+y)$; 17. $2(p+2)(p-2q)$;

18.$(a+c^2)(1-2p)$; 19. $(3x-2a)(x^2-xy-y^2)$; 20.$(a^2b^3-n^4)(1-3x+x^2)$;

21. $(p+q)^2$; 22. $(a-b)^2$; 23. $(2p+q)^2$; 24. $(3x-y)^2$; 25. $\left(\frac{3}{2}a+\frac{2}{5}b\right)^2$;

26. $\left(\frac{2}{3}p^2q-\frac{1}{5}q^2\right)^2$; 27. $(x+2)(x+4)$; 28. $(x-2)(x-4)$; 29. $(p+4)(p-2)$;

30. $(p-4)(p+2)$; 31. $6x(x-3)(x+2)$; 32. $(a^2+4)(a^2+3)$;

33. $(p^2+2)(p+1)(p-1)$; 34. $[(p+q)+6][(p+q)-3]$; 35.$(ab-9)(ab+7)$;

36. $(2\sqrt{2}-x)(2\sqrt{2}+x)(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x)$; 37. $(5+a)(2-a)$;

38. $(x-4y)(x-3y)$; 39. $(p-9)(p-1)$; 40. $(5q-4)(q-2)$;

41. $(3x-4)(2x+3)$; 42. $(3x-2)(x-3)$; 43. $(2u+1)(u+1)$;

44. $(u+2)(2u-1)$; 45. $(2x-5)(4x+3)$; 46. $(5b+3)(2b+1)$;

47. $(3z+2)(4z-3)$; 48. $(4m-11)(m+3)$; 49. $(9x+1)(x+1)$;

50. $(3p-8)(2p+3)$; 51. $\left(\sqrt{2}x-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}x+\sqrt{3}\right)$;

52. $\left(\sqrt{3}x-\sqrt{2a}\right)\left(\sqrt{3}x+\sqrt{2a}\right)(3x^2+2a)$; 53. $\left(2x-\sqrt[4]{3a^2}\right)\left(2x+\sqrt[4]{3a^2}\right)\left(4x^2+\sqrt{3}a\right)$;

54. $\left[\sqrt{a-2b}-4x\right]\left[\sqrt{a-2b}+4x\right][(a-2b)+16x^2]$;

55. $\left(\sqrt[4]{5a^2}-\sqrt[4]{7}b\right)\left(\sqrt[4]{5a^2}+\sqrt[4]{7}b\right)\left(\sqrt{5}a+\sqrt{7}b^2\right)$; 56. $-16a(4a^2+1)$;

57. $\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)(x^2+2)(x^4+4)$; 58. $(a-b+1)(a+b-5)$;

59. $\left(\sqrt{15}p-\sqrt{17}q\right)\left(\sqrt{15}p+\sqrt{17}q\right)$; 60. $(1-a)(1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)$;

61. $(ab^2-6y^3)(a^2b^4+6ab^2y^3+36y^6)$; 62. $(3-x)(x^2+3x+9)$;

63. $(5x^4+4)(25x^8-20x^4+16)$; 64. $(1-3x)(1+3x)(81x^4+9x^2+1)$;

65. $\left(\sqrt{2}-a\right)\left(\sqrt{2}+a\right)(2+a^2)(16+4a^4+a^8)$; 66.$(a+b+1)[(a+b)^2-(a+b)+1]$;

67. $[2-(a-b)][4+2(a-b)+(a-b)^2]$; 68.$3x^2-15x+19$;

69. $[4(x+a)-5][16(x+a)^2+20(x+a)+25]$;

70. $-q^2[(p-q)^2+(p+q)^2+q^2-p^2]$;

Parte III

1. a; 2. $\frac{3x-2}{x-2}$, para $x \neq -\frac{3}{2}$; 3. $\frac{x+p}{x-p}$, para $x \neq p$ 4. $x-y$, para $a \neq -b$

5. $\frac{a-2}{2a}$, para $a \neq 2$; 6. $\frac{2x+1}{x-3}$, para $x \neq 3$ 7. $\frac{3q}{p(x+p)}$, para $p \neq 0$

8. $\frac{(5-x)(x+4)}{x+2}$, para $x \neq -5$ y $x \neq 3$; 9. $\frac{[(a+b)-(c-d)]}{[(a+c)-(b-d)]}$; 10. $x+3$, para $x \neq 2$;

Parte IV

1. $\frac{y-x}{x+y}$; 2. $\frac{3x^2+4x-5}{(x+2)(x+1)}$; 3. $(x-2)(x+3)$, para $x \neq -4$ y $x \neq 1$;

4. $\frac{2}{x+2}$, para $x \neq -1$ y $x \neq 1$; 5. $\frac{p(2x+1)}{x^2-a^2}$; 6. $\frac{(p-1)(p+3)}{p^2-49}$; para $p \neq 5$ y $p \neq 8$;

7. $\frac{3x^5+6x^4-25x^3-96x^2+19x-6}{(x^2-1)(x-2)(x-3)(x+5)}$; 8. $\frac{x(x-3)}{2x-1}$; para $x \neq -8$, $x \neq -3$, $x \neq -\frac{1}{2}$, $x \neq 0$, $x \neq 3$

9. $\frac{a(x-b)(2x+a)}{x(a^2-bx)}$; 10. 1, si $x \neq -7$, $x \neq -2$, $x \neq 2$ y $x \neq 5$; 11. $\frac{(x-2)^2}{x(x-3)}$;

12. $\frac{x-1}{x-2}$, para $x \neq -1$; 13. $\frac{x^2+5}{x}$;

Respuestas Actividad N° 5

Parte I

1. $S=\{3,4\}$; 2. $S=\{-3,2\}$; 3. $S=\{-3,-2\}$; 4. $S=\left\{-\frac{1}{2},2\right\}$;

5. $S=\left\{-\frac{2}{3},\frac{3}{2}\right\}$; 6. $S=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$; 7. $S=\emptyset$; 8. $S=\left\{-2,\frac{3}{2}\right\}$ 9. $S=\left\{-1,\ \frac{8}{3}\right\}$;

10. $S=\left\{\frac{3}{4},1\right\}$; 11. $S=\left\{\frac{3}{4},8\right\}$; 12. $S=\left\{-\frac{4}{3},5\right\}$; 13. $S=\left\{-\frac{k^2}{2},k^2\right\}$

14. $S=\left\{-\frac{1}{2}(a+b),(a+b)\right\}$; 15. $S=\left\{\frac{3}{2p}\right\}$; 16. $S=\{\pm\sqrt{19};\ \pm 1\}$

17. $S=\left\{\pm 2,\pm\frac{2}{3}\right\}$; 18. $S=\{-4,\ 4\}$; 19. $S=\{-3,-2,1\}$; 20. $S=\{-4,-3,2\}$

21. $S=\{-4,-3,-2,-1\}$; 22. $S=\left\{-\frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{2}\right\}$; 23. $S=\left\{-\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\ \frac{3}{2},2\right\}$;

24. $S=\left\{-2,-1,-\frac{1}{2},1,2\right\}$

Parte II

1) $S=(-\infty,-2]\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$; 2) $S=\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup[2,+\infty)$; 3) $S=\left\{\frac{1}{3}\right\}$;

4) $S=\mathbb{R}\sim\left\{\frac{3}{2}\right\}$; 5) $S=\emptyset$; 6) $S=(-\infty,-1]\cup[4,+\infty)$; 7) $S=[-4,0]$;

8) $S=(-\infty,-9)\cup(9,+\infty)$; 9) $S=[2,\ 3]$; 10) $S=\left(-\frac{2}{3},\ \frac{5}{2}\right)$; 11) $S=(-\infty,\ 3]$;

12) $S=(-3,3)$; 13) $S=(-\infty,-1]\cup\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]\cup[1,+\infty)$; 14) $S=\left[-\sqrt{10},-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2},\sqrt{10}\right]$;

15) $S=(-\infty,-2)\cup\left(\frac{1}{2},1\right)$; 16) $S=\left[-2,-\frac{2}{3}\right]\cup\left[-\frac{1}{2},1\right)$;

17) $S=\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{2}\right)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$; 18) $S=(-\infty,-2)\cup\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)\cup(1,2)$;

19) $S=\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right]\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$; 20) $S=\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)\cup\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$;

21) $S=(-\infty,-1)\cup\left[-\frac{1}{3},+\infty\right)$; 22) $S=(-\infty,-1)\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$; 23) $S=(-1,1)$;

24) $S=(-1,1)\cup(1,+\infty)$; 25) $S=\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)\cup\left[-1,\frac{2}{3}\right]\cup(1,+\infty)$;

26) $S=(-\infty,0)\cup(3,7)$; 27) $S=\left(0,\frac{3}{4}\right)\cup(8,+\infty)$; 28) $S=\left(-\infty,-\frac{8}{5}\right]\cup-1,1)$;

29) $S=(-\infty,-1)\cup\left(-1,-\frac{1}{2}\right)\cup(1,3)$; 30) $S=(-\infty,-3)\cup(-1,1)\cup(1,2)\cup(2,3)\cup(5,+\infty)$

31) $S=\left(\frac{1}{3},3\right)$; 32) $S=(-4,0)\cup(1,3)$ 33) $S=\left(\frac{-3-\sqrt{17}}{4},-\frac{3}{2}\right)\cup\left(1,\frac{3+\sqrt{17}}{4}\right)$

34) $S=\left(-\infty,\frac{5+\sqrt{17}}{4}\right]$; 35) $S=\emptyset$; 36) $S=\mathbb{R}\sim\{1\}$; 37) $S=\left(-\frac{1}{2},\infty\right)$; 38) $S=\mathbb{R}$;

39) $S=\left(\frac{5-\sqrt{17}}{4},\frac{5+\sqrt{17}}{4}\right)\cup(3,+\infty)$; 40) $S=\left[-\frac{9}{2},\ \frac{3}{2}\right]$; 41) $S=\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)\cup(2,+\infty)$;

42) $S=[-2,2]$; 43) $S=\left(-1,-\frac{1}{2}\right)\cup(5,+\infty)$; 44) $S=(-\infty,-2)\cup\left(-\frac{1}{3},2\right)$;

Parte III

1) 2 y 4; 2) 4 y 7; 3) 6 y 8; 4) 36; 5) 6 y 9; 6) 40; 7) 35; 8) 10;

9) 8 y 15; 10) 6;

Bibliografía

1. Barnett, R. (1978). Precálculo: Algebra, geometría analítica y trigonometría. Editorial Limusa. México.
2. Morales, A y Cuellar, R. (1978). Matemática resumida. Editorial Norma. Colombia.
3. Munem, M y Yizze, J. (1.985). Precálculo: Introducción funcional. Editorial Reverté. Barcelona.
4. Rada, S. (1982). Un desafío a la juventud: Problemas de las olimpiadas matemáticas venezolanas. Editorial CENAMEC. Caracas
5. Rada, S. (1992). Un desafío a la juventud II: Problemas de las olimpiadas matemáticas venezolanas. Editorial CENAMEC. Caracas